

STŘEDNÍ SMÍCHOVSKÁ PRŮMYSLOVÁ ŠKOLA

Deskriptivní geometrie

Skripta pro 2.ročník

Radko Sáblík

28.11.2011

ZPRACOVAL - PETR BYRTUS

1. díl

OBSAH 1. DÍLU

Mongeovo promítání	3
Cíle a význam deskriptivní geometrie.....	3
Základní pojmy – značení	3
Zobrazení bodu	4
Zobrazení přímky, stopníky přímky	6
Zvláštní polohy přímek	7
Vzájemná poloha přímek	8, 9
Zobrazení roviny	9
Zvláštní polohy roviny	10, 11
Hlavní přímky roviny	12, 13
Vzájemná poloha rovin	13, 14
Bod a rovina	14, 15
Přímka a rovina	15, 16
Přímka a rovinný obrazec	16
Průseky rovinných obrazců.....	17
Odchylky přímky od průměten	17, 18
Skutečná velikost úsečky	18, 19, 20
Spádové přímky roviny.....	20
Odchylky roviny od průměten	21, 22
Přímka kolmá k rovině	21, 22
Otáčení roviny.....	23
Otáčení bodu.....	23, 24

MONGEOVO PROMÍTÁNÍ



- francouzský učitel na vojenské škole, za revoluce ministr a senátor
- dosáhl toho, že deskriptivní geometrie se stala z tajné vojenské vědy přístupnou pro techniku
- objevil novou metodu zobrazování – pravoúhlé promítání na dvě kolmé průmětny
- řekl zajímavou větu: „Deskriptivní geometrie se stane v budoucnosti jednou z hlavních součástí národní výuky, protože její metody jsou pro pracující tak důležité jako čtení, psaní a aritmetika.“

CÍLE A VÝZNAM DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

- deskriptivní geometrie umožňuje zjišťovat skutečný průběh různých průniků těles a ploch, naučí zobrazovat prostorové útvary, jsme schopni zjišťovat tvar plášťů různých těles, konstrukce kuželoseček apod.
- deskriptivní geometrie rozvíjí představivost, je nutné si představit danou situaci, nelze se pouze učit nazpaměť konstrukce
- deskriptivní geometrie rozvíjí i logické myšlení, jsme nuceni přicházet na to, kterou základní konstrukci pro danou úlohu použít. Někdy je možné více správných řešení, některé je výhodnější, některé méně, některé je nevhodné pro svou složitost
- deskriptivní geometrie umožňuje lépe pochopit promítání při kreslení strojních součástí, jestliže ji ovšem alespoň v základech zvládneme

ZÁKLADNÍ POJMY – ZNAČENÍ

bod – základní geometrický útvar – označujeme velkými písmeny – A, B, C

přímka – označujeme malými písmeny a, b, p, q

roviny (plochy) – označujeme malými písmeny řecké abecedy – π , ρ , σ

úsečky – označujeme AB – A, B – hraniční body, nebo a, b, c

totožnost – bod A je totožný s bodem B – $A = B$ ($A \equiv B$)

různost – bod A je různý od bodu B – $A \neq B$

příslušnost k útvaru – bod A je element přímky p (bod A leží na přímce p) – $A \in p$

rozdílnost od útvaru – přímka p neleží v rovině ρ – $p \notin \rho$

kolmost – přímka p je kolmá na přímkou q – $p \perp q$

rovnoběžnost – přímka p je rovnoběžná s přímkou q – $p \parallel q$

různoběžnost – rovina σ není rovnoběžná s rovinou ρ – $\sigma \nparallel \rho$

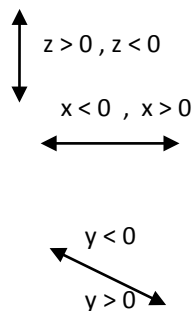
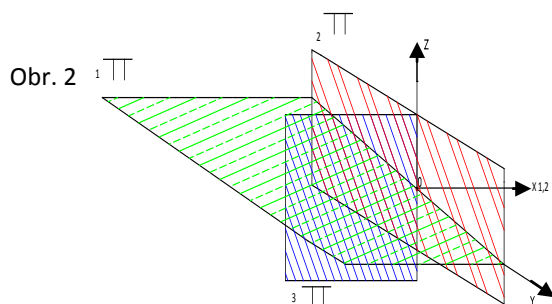
SOUŘADNÝ SYSTÉM (POPIS OBR.1)

X_{12}	-	Základnice
$^1\pi$	-	Půdorysna (1.průmětna)
$^2\pi$	-	Nárysna (2.průmětna)
$^3\pi$	-	Půdorysna (3.průmětna)



POPIS OBR.2

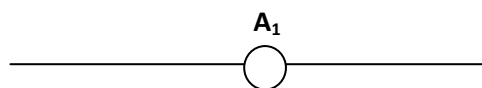
- I. kvadrant – nad první a před druhou průmětnou $z > 0, y > 0$
- II. kvadrant – nad první a za druhou průmětnou $z > 0, y < 0$
- III. kvadrant- pod první a za druhou průmětnou $z < 0, y < 0$
- IV. kvadrant – pod první a před druhou průmětnou $z < 0, y > 0$



ZOBRAZENÍ BODU

Zápis bodu : $A(x; y; z)$, příklad: $A(3; 2; 4)$

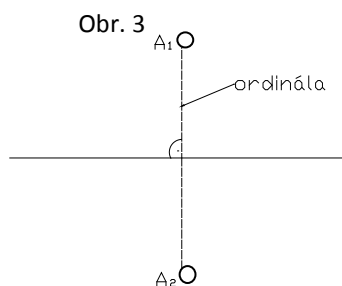
Vyznačení bodu:



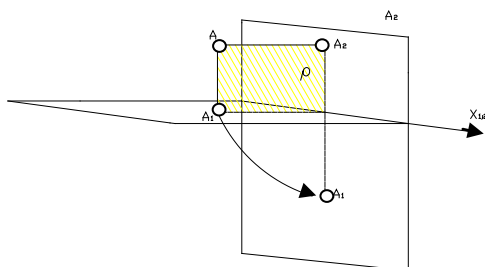
Zakreslení bodu do systému: (viz obr. 3 a obr. 4)

Popis k obr. 3 a obr. 4

- A_1 - první průmět bodu A
 A_2 - druhý průmět bodu A
 A_1, A_2 - sdružené průměty bodu A



Obr. 4



Ordinála: kolmice k základnici , leží na ní sdružené průměty bodů , kreslí se čárkovaně

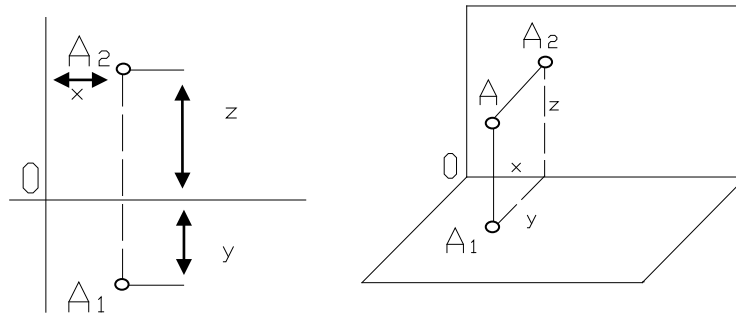
- p_1 - promítací přímka - kolmá na $^1\pi$
 p_2 - promítací přímka - kolmá na $^2\pi$
 β - promítací rovina - kolmá na příslušnou průmětu



Příklad 1

- vyneste do souřadného systému bod a (3; 2; 4) – viz. Obr. 5

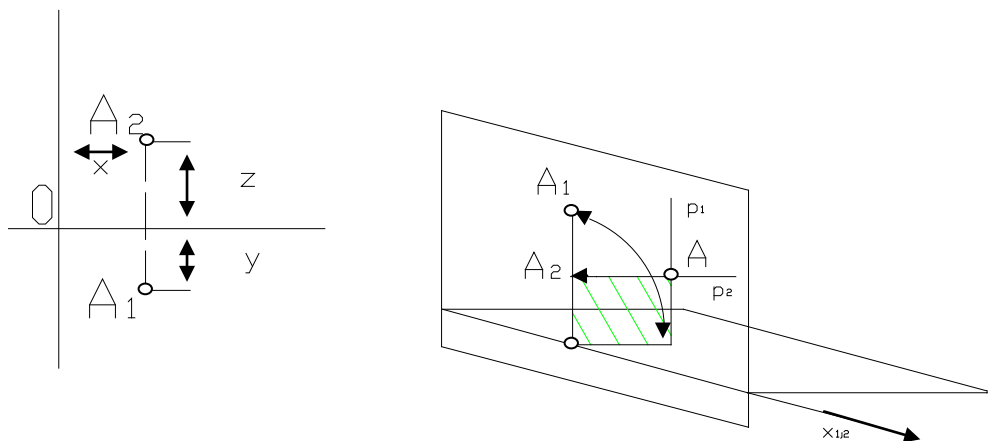
Obr. 5



Příklad 2

- bod a (3 ; -2 ; 4) – viz. Obr. 6

Obr. 6



Postup řešení:

- nakreslím souřadný systém , měřítko zvolím
- vyneste x souřadnici – pro bod A - x_A
- sestrojím ordinálu
- vynesu y souřadnici , označím bod A_1
- vynesu x souřadnici , označím bod A_2

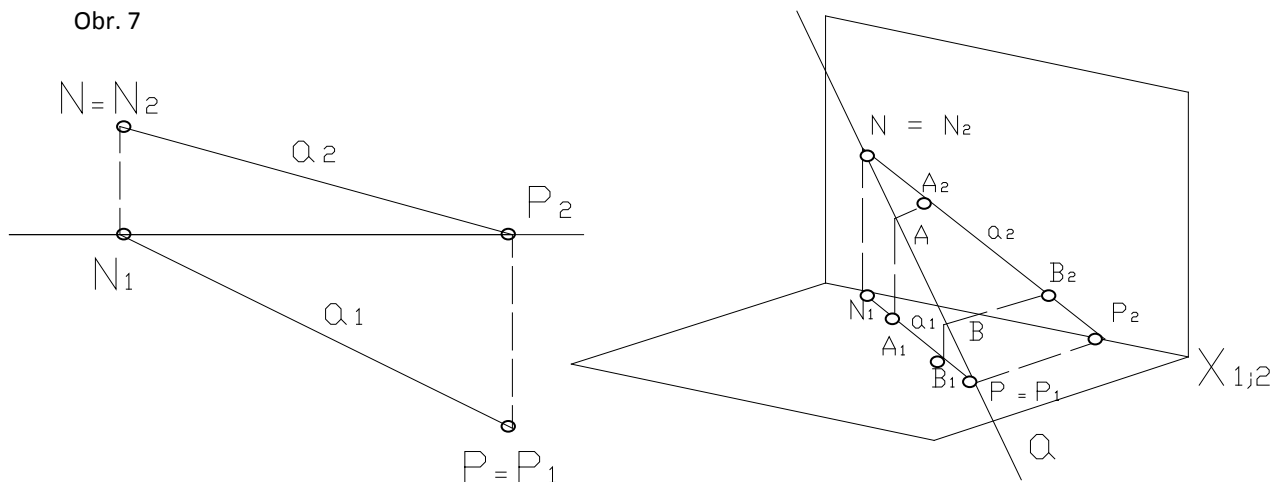
Poznámka: Další body zkuste sami. V případě , že bude některá ze souřadnic záporná, musíme jí vynášet na opačnou stranu. V případě , že je záporná souřadnice y , leží A_1 i A_2 nad základnicí , v případě , že je záporná



souřadnice z , leží A_1 i A_2 pod základnicí. Mohou nastat i další případy, je-li jedna ze souřadnic nulová, obě (y i z) jsou záporné atd. Pokuste se sami najít zvláštní případy, body si zakreslit a jestliže nevíte, pokuste se řešit případ pomocí prostorového zobrazení. Nebo použijte jiné pomůcky – stačí ohnutý list tvrdého papíru.

ZOBRAZENÍ PŘÍMKY, STOPNÍKY PŘÍMKY

Obr. 7

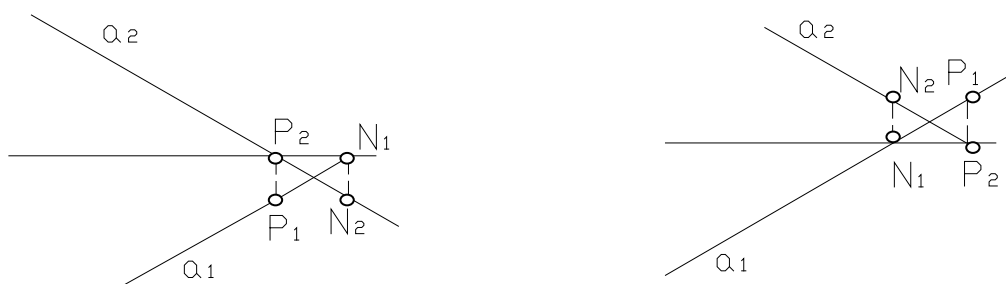


Zobrazení přímky: Každá přímka je jednoznačně určena dvěma body A, B , jestliže platí, že $A \neq B$. Spojnice prvních průmětů bodů A_1, B_1 tvoří první průmět přímky a_1 . Přímky a_1, a_2 nazýváme sruženými průměty přímky a_2 .

Pozn. Při zvláštní poloze bodů A, B nesmíme zapomenout, že musíme vždy spojovat správné průměty bodů – půdorysné (index 1) a nárysny (index 2).

Stopníky přímky: Jestliže je přímka v obecné poloze, protíná obě průmětny. Průmětnu π^1 (půdorysnu) protíná v bodě P – nazývá se půdorysný stopník. Průmětnu π^2 (nárysnu) protíná v bodě N – nazývá se nárysny stopník. Konstrukce stopníků je patrná z Obr. 7 a v Mongeově projekci zobrazena pro zvláštní případy na Obr. 8.

Obr. 8

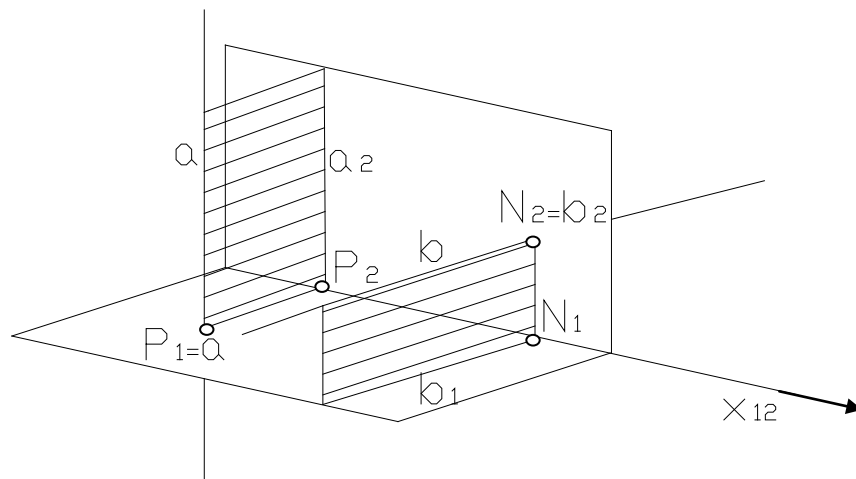
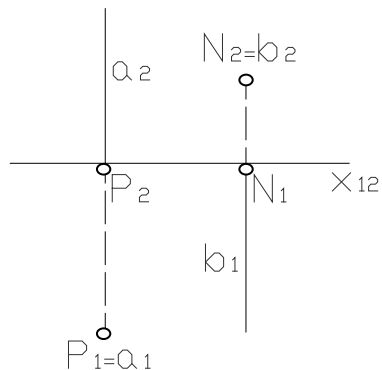


Pozn. Jelikož půdorysný stopník leží přímo v půdorysně, splývá první průmět P_1 s bodem P , tedy $P_1 = P$, druhý průmět P_2 pak nutně musí ležet na základnici $X_{1,2}$ (souřadnice z bodu P je nulová). Pro nárysny stopník platí totéž, pouze se mění index, tedy $N_2 = N$, N_1 pak nutně leží na základnici $x_{1,2}$ (souřadnice y bodu N je nulová)

ZVLÁŠTNÍ POLOHY PŘÍMEK

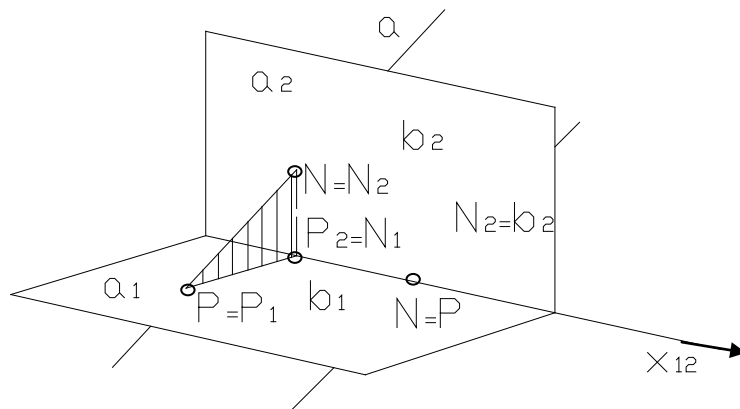
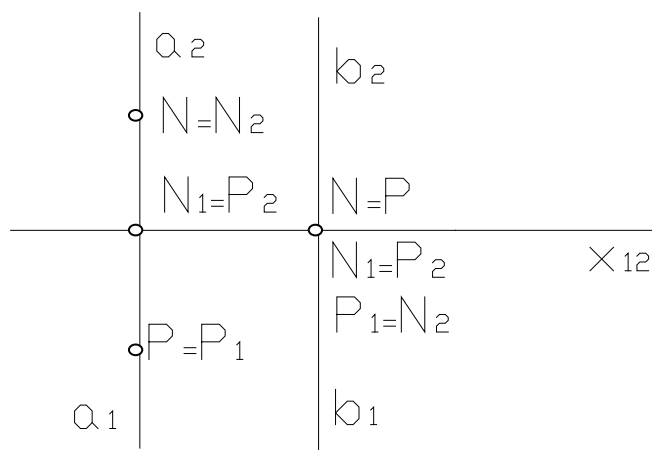
Přímka kolmá k první (druhé) průmětně : Je-li přímka kolmá k průmětně, Pak jedním jejím průmětem je přímka kolmá k x_{12} a druhým průmětem je bod.

Obr. 9



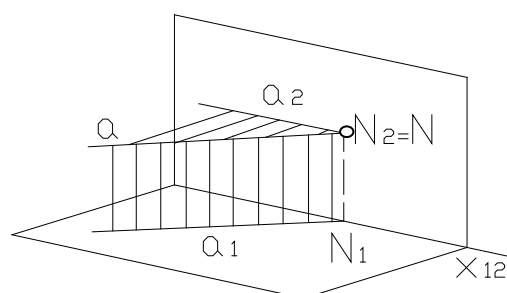
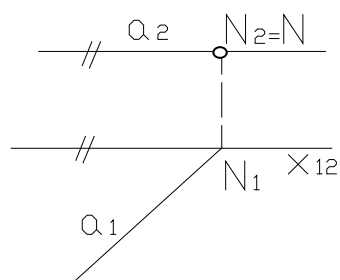
Přímka kolmá k x_{12} : Je-li přímka kolmá k x_{12} (základnici) a není kolmá k žádné průmětně, pak její sdružené průměty splývají (a_1 a a_2), přičemž platí že $a_1=a_2 \perp x_{12}$.

Obr. 10



Přímka rovnoběžná s půdorysnou: Je-li přímka rovnoběžná s půdorysnou ($^1\pi$) a není-li promítací (kolmá na nárysnu), je druhý $a_2 \parallel x_{12}$.

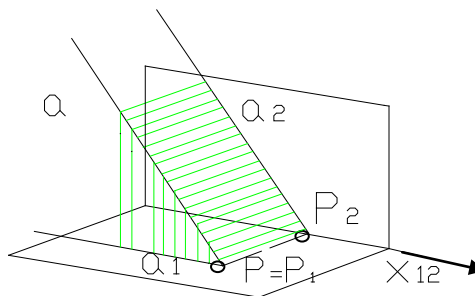
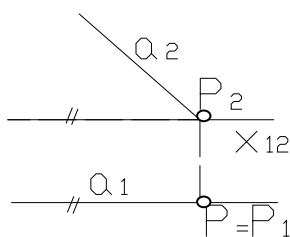
Obr. 11





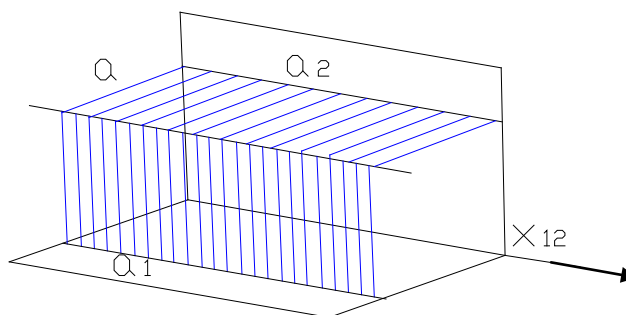
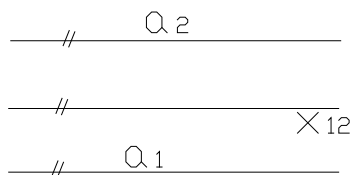
Přímka rovnoběžná s nárysou: Je-li přímka rovnoběžná s nárysou ($^2\pi$) a není-li promítací, je její první průmět $a_1 \parallel x_{12}$.

Obr. 12



Přímka rovnoběžná se základnicí $x_{1,2}$: Je-li přímka rovnoběžná se základnicí, jsou oba její průměty rovnoběžné se základnicí, tedy $a_1 \parallel a_2 \parallel x_{12}$.

Obr. 13

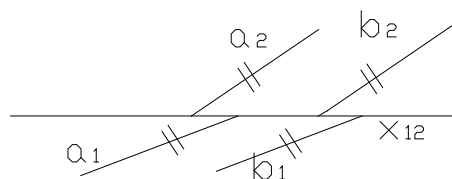


VZÁJEMNÁ POLOHA PŘÍMEK

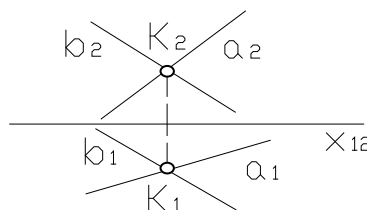
Přímky rovnoběžné: Dvě různé přímky a, b v obecné poloze jsou rovnoběžné tehdy, jestliže platí, že $a_1 \parallel b_1$ a zároveň $a_2 \parallel b_2$. Jinými slovy, dvě přímky jsou rovnoběžné, když jsou rovnoběžné jejich první a zároveň i druhý průmět. Viz Obr. 14

Přímky různoběžné: Dvě různé přímky a, b v obecné poloze jsou různoběžné tehdy, jestliže průsečík $a_1 \times b_1$ a průsečík $a_2 \times b_2$ leží na ordinále. Jinými slovy, jsou-li přímky různoběžné, mají právě jeden společný bod (viz. Obr. 15, zde bod K). Z předchozích kapitol víme, že sdružené průměty bodu musí ležet na ordinále, tedy K_1 (průsečík $a_1 \times b_1$) a K_2 (průsečík $a_2 \times b_2$) leží na vzpomínané ordinále.

Obr. 14



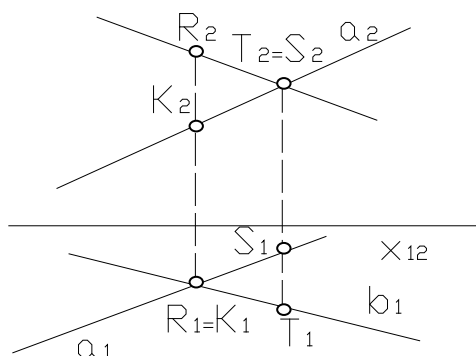
Obr. 15



Přímky mimoběžné: Dvě různé přímky a, b v obecné poloze jsou mimoběžné tehdy, jestliže průsečík

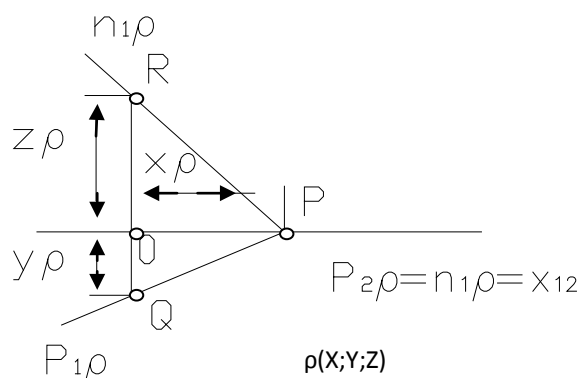
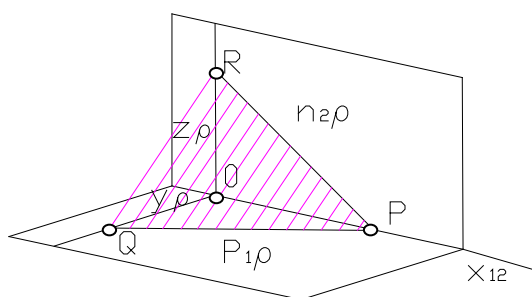
$a_1 \times b_1 = K_1 = R_1$ $a_2 \times b_2 = S_2 = T_2$ neleží na ordinále. Jelikož tyto přímky nemají žádný společný bod, jsou průsečíky prvních resp. Druhých průmětů pouze zdánlivé, tedy nejde o žádný společný bod, ale pouze o čtyři různé body, které v některých průmětech splývají.

Obr. 16



ZOBRAZENÍ ROVINY

Obr. 17



Rovina je obecně určena třemi navzájem různými body. Může být určena též bodem a přímkou, dvěma rovnoběžkami nebo různoběžkami. Rovina bývá též určena pomocí úseků, které vytíná na jednotlivých osách. V Mongeově promítání platí, že průmětem roviny, která není kolmá na průmětnu je průmětna, průmětem roviny, která je kolmá na průmětnu je přímka. Obecná rovina (viz. Obr. 17) protíná obě průmětny v přímkách, které nazýváme **stopy roviny**. Průsečnice roviny s půdorysnou (první průmětnou $^1\pi$) se nazývá půdorysná (první) stopa roviny, průsečnice roviny s nárysou (druhou průmětnou $^2\pi$) se nazývá nárysná (druhá) stopa roviny. Stopy roviny se protínají na základnici x_{12} .

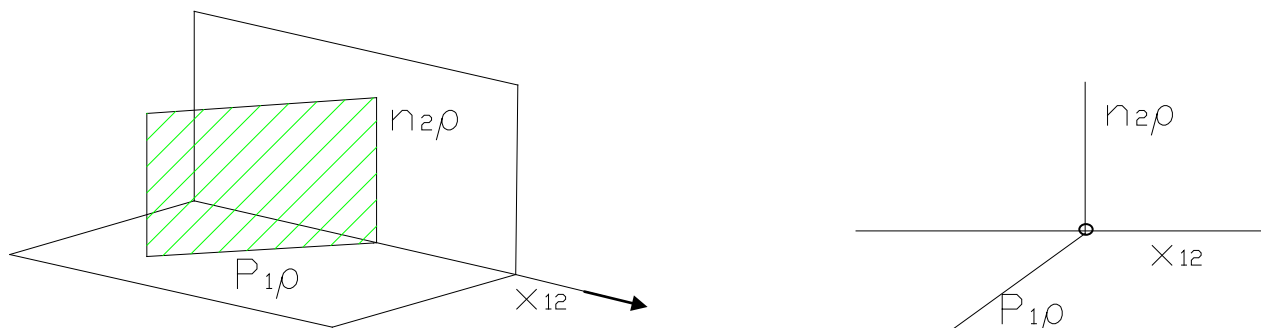
Zápis a zakreslení roviny: Rovinu často zapisujeme pomocí úseků, které vytíná rovina na jednotlivých osách – zápis v tzv. úsekovém tvaru (existují ovšem i jiné) – $p(x_0; y_0; z_0)$. Postup vynášení jednotlivých úseků je znázorněn na Obr.17 vpravo. Úseky vynášíme na příslušné osy vždy z počátku souřadného systému (0). Jestliže je souřadnice některého úseku záporná, nesmíme zapomenout vynést tento úsek na druhou stranu od počátku.

Poznámka: Jelikož stopy leží v průmětnách, tedy $p_{1p} = p_p \in ^1\pi$, resp. $n_{2p} = n_p \in ^2\pi$, jejich druhé průměty splývají se základnicí x_{12} , tedy $p_{2p} = n_{1p} = x_{12}$.

ZVLÁŠTNÍ POLOHY ROVIN

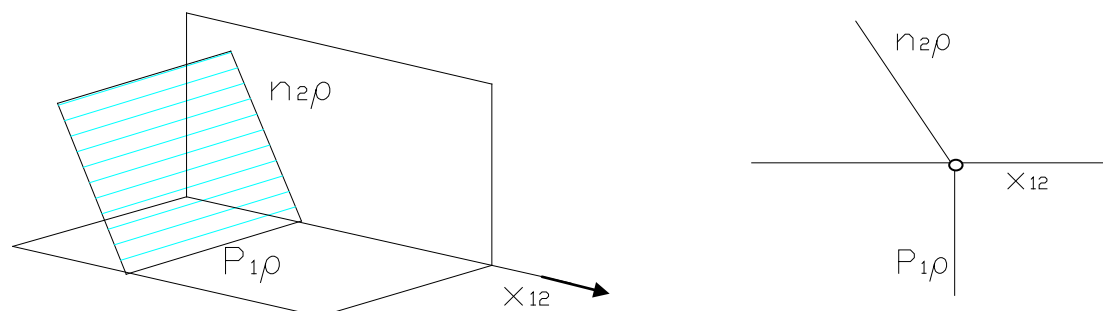
Rovina kolmá k půdorysně: Je-li rovina kolmá k půdorysně, je její nárysná stopa kolmá k základnici x_{12} . V půdorysu se všechny body roviny promítají do stopy $p_{1\rho}$.

Obr. 18

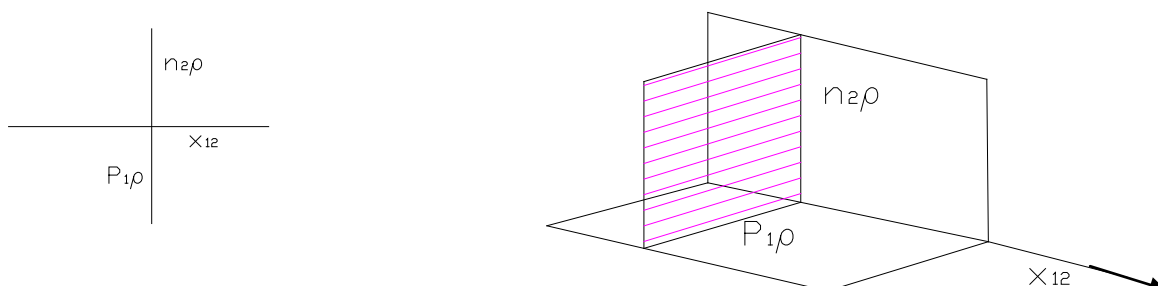


Rovina kolmá k nárysně: Je-li rovina kolmá k nárysně, je její půdorysná stopa kolmá k základnici x_{12} . V nárysu se všechny body roviny promítají do stopy $n_{2\rho}$.

Obr. 19



Rovina kolmá k oběma průmětnám: Je-li rovina kolmá k oběma průmětnám, je zároveň kolmá i k základnici x_{12} . Obě stopy, jak půdorysná, tak nárysná, jsou kolmé k základnici x_{12} . Všechny body v půdorysu i nárysu se promítají do přímky – stopy – $p_{1\rho}$ resp. $p_{2\rho}$.

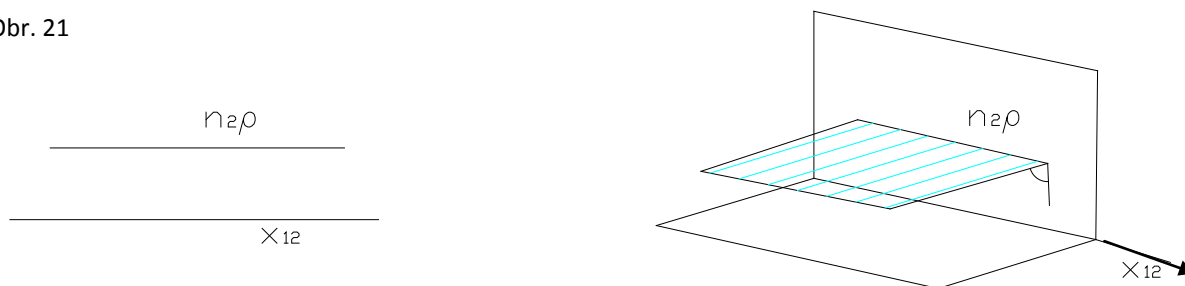


Obr. 20

Rovina rovnoběžná s půdorysnou: Je-li rovina rovnoběžná s půdorysnou, je zároveň kolmá k nárysně. Proto průmětem roviny v půdorysu je celá průmětna, v nárysu pouze stopa n_{2p} , která je rovnoběžná se základnicí x_{12} . Půdorysná stopa není – půdorysna a rovina nemají žádný společný bod.



Obr. 21



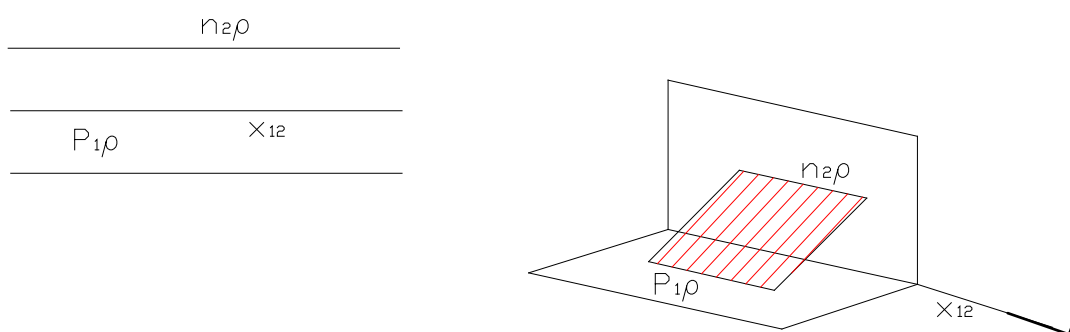
Rovina rovnoběžná s nárysnou: Je-li rovina rovnoběžná s nárysnou, je zároveň kolmá k půdorysně. Proto průmětem roviny v nárysu je celá průmětna, v půdorysu pouze stopa p_{1p} , která je rovnoběžná se základnicí x_{12} . Nárysná stopa není – nárysna a rovina nemají žádný společný bod.

Obr.22



Rovina rovnoběžná se základnicí x_{12} : Je-li rovina rovnoběžná se základnicí x_{12} , jsou obě stopy roviny rovnoběžné se základnicí x_{12} , tedy $p_{1p} \parallel n_{2p} \parallel x_{12}$. Průmětem roviny v půdorysu je celá půdorysna, v nárysu nárysna. Jelikož jsou obě stopy rovnoběžné, protínají se sice taky na základnici x_{12} , ale až v nekonečnu. (Kdo nevěří, ať tam běží).

Obr. 23

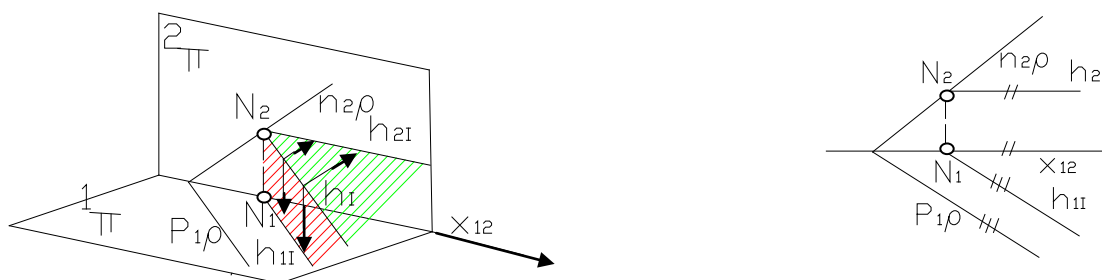


HLAVNÍ PŘÍMKY ROVINY

Hlavní přímky roviny jsou takové přímky, které leží v dané rovině a zároveň jsou rovnoběžné s průmětnou.

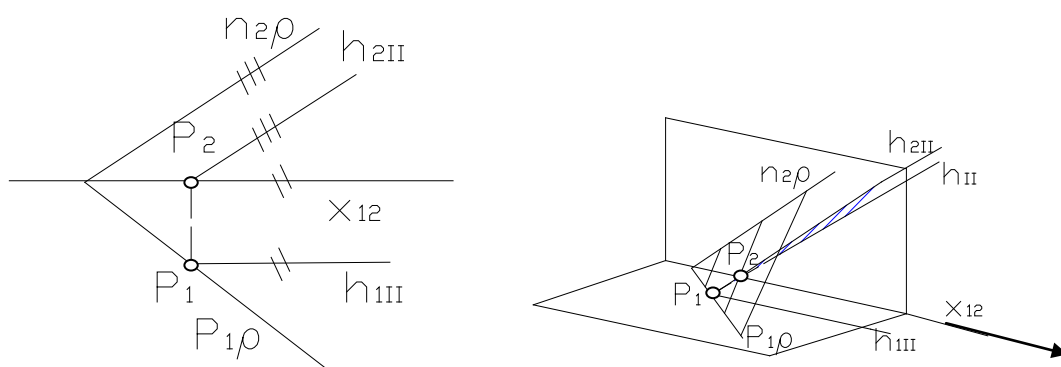
Hlavní přímky první osnovy - h^1 : Hlavní přímka první osnovy je přímka, která leží v dané rovině a je zároveň rovnoběžná s půdorysnou (první průmětnou 1π). Jelikož je přímka h^1 rovnoběžná s půdorysnou, nemá půdorysný stopník. Nárysný stopník leží na nárysné stopě $n_{2\rho}$, protože přímka h^1 je součástí roviny a rovina a průmětna mají společnou právě stopu – tedy i společný bod přímky h^1 a nárysny, musí být součástí této stopy.

Obr. 24



Hlavní přímky druhé osnovy - h^2 : Hlavní přímka druhé osnovy je přímka, která leží v dané rovině a je zároveň rovnoběžná s nárysnou (druhou průmětnou 2π). Protože tentokrát je přímka h^2 rovnoběžná s nárysnou, nemá nárysný stopník. Půdorysný stopník, z příčin vysvětlovaných v odstavci výše, leží na půdorysné stopě $p_{1\rho}$.

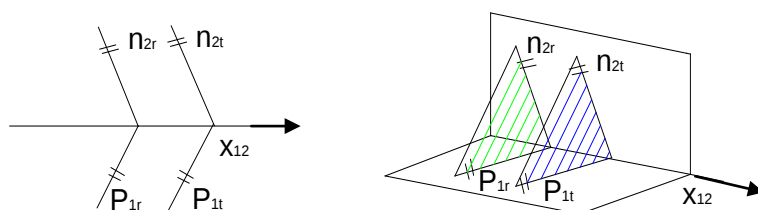
Obr. 25



Poznámka: Hlavními přímkami můžeme lehce zjistit, zda libovolný bod leží nebo neleží v rovině, eventuálně sestrojít bod, který v rovině bude ležet. Této skutečnosti využijeme v následujících kapitolách.

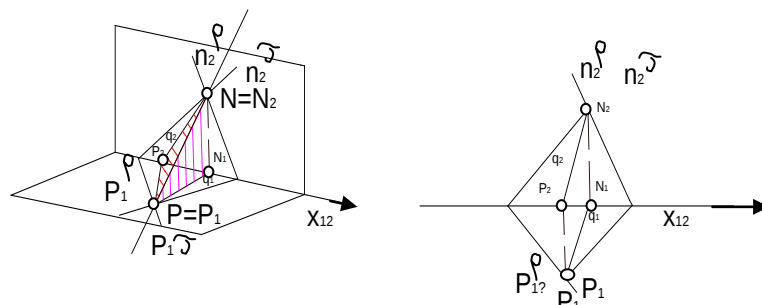
VZÁJEMNÁ POLOHA ROVIN

Rovnoběžné roviny: Jestliže dvě roviny, ρ a τ , jsou rovnoběžné, potom platí, že půdorysné stopy jsou rovnoběžné – $p_{1\rho} \parallel p_{1\tau}$ – a zároveň nárysne stopy jsou rovnoběžné – $n_{2\rho} \parallel n_{2\tau}$.



Obr. 26

Různoběžné roviny: Jestliže dvě různé roviny mají společný bod, musí mít nutně společnou celou přímku $q = \rho \times \tau$. Této přímce q říkáme průsečnice a roviny nazýváme různoběžné. K sestrojení průsečnice (jako každé přímky) je třeba určit dva body. Jsou-li obě roviny dány stopami, určíme tuto přímku pomocí stopníků P a N . P je průsečík prvních stop rovin, N je průsečík druhých stop rovin. Body P a N jsou stopníky hledané průsečnice obou rovin.



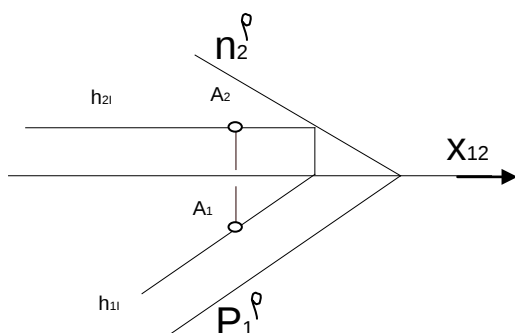
Pozn: Jelikož body P a N jsou společnými body rovin p a τ , musí jimi nutně procházet jediná společná přímka q . Jelikož body P, N leží zároveň n průmětnách, jedná se současně o stopníky dané průsečnice.

Postup při sestřování průsečnice dvou rovin (viz. Obr. 27):

- 1) Sestrojte stopy rovin p a τ .
- 2) Najděte půdorysný stopník P a jeho průměty P_1 a P_2 .
- 3) Najděte nárysný stopník N a jeho průměty N_1 a N_2 .
- 4) Spojte první průměty stopníků P_1 , N_1 a máme první průmět průsečnice q (q_1).
- 5) Spojte druhé průměty stopníků P_2 , N_2 a máme druhý průmět průsečnice q (q_2).

BOD A ROVINA

Bod buď v rovině leží, nebo neleží. Bod leží v rovině tehdy, leží-li na některé přímce roviny. Ke zjištění, zda bod v rovině leží nebo neleží můžeme použít již zmíněných hlavních přímek roviny. Jestliže bodem vedeme hlavní přímku roviny, musí průmět bodu A_1 ležet na průmětu přímky h_1 a zároveň průmět bodu A_2 na průmětu přímky h_2 . Není-li toto splněno, můžeme s jistotou říct, že tento bod A v rovině neleží a naopak.



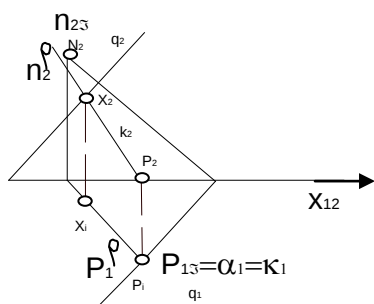
Obr.28

PŘÍMKA A ROVINA

- a) Přímka leží v rovině – pak musí nutně všechny její body ležet v rovině – $p \in \rho$
- b) Přímka protíná rovinu – pak má pouze jeden společný bod $p \times \rho = X$
- c) Přímka leží mimo rovinu – je s ní rovnoběžná – nemají žádný společný bod

Průsečík přímky s rovinou (viz. Obr. 28b):

Průsečík přímky a roviny sestojíme tak, že využijeme znalostí s průsečnicí dvou rovin. Sestrojíme rovinu, ve které bude bezpečně ležet přímka a , např. rovinu τ . Sestrojíme-li teď průsečnici rovin p a τ , přímkou k , pak na této na této přímce k leží všechny body, které jsou společné rovinám p a τ . Jelikož přímka a je součástí roviny τ a má zároveň jeden bod společný s rovinou p , musí tento bod ležet na průsečnici k . Abychom si nekomplikovali život, proložíme přímkou a rovinu τ takovou, že je kolmá na některou z průmětů. Víme totiž, že je-li rovina kolmá na průmětnu, v jednom průmětu se všechny body zobrazují do stopy. Proto $a_1 = p_{1p} = k_1$, jak je patrné z Obr. 28b.



Obr. 28b

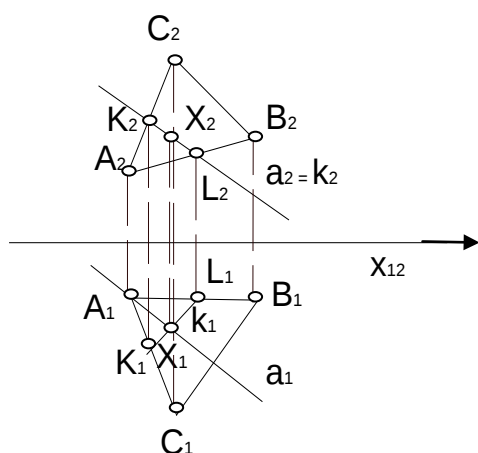
Postup při sestřování průsečíku přímky a roviny (viz. Obr. 28b):

- Sestrojte stopy roviny ρ .
- Přímkou a proložte pomocnou rovinu τ kolmou na $^1\pi$.
- Sestrojte průsečnici rovin k ; $k = \rho \times \tau$
- Nalezněte průsečík X ; $X_2 = k_2 \times a_2$; X_1 leží na ordinále

PŘÍMKA A ROVINNÝ OBRAZEC

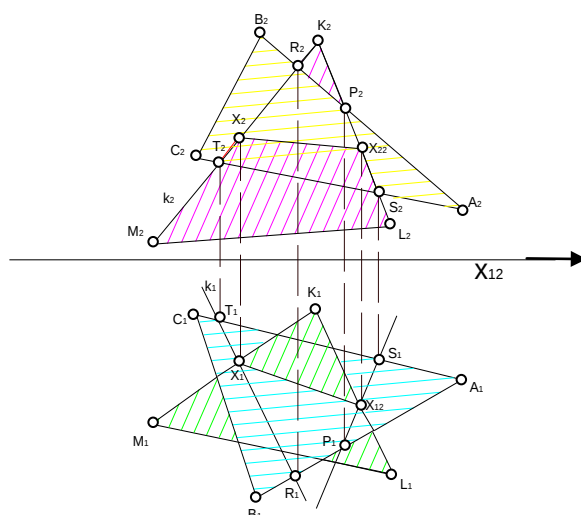
Přímka a rovinný obrazec mohou mít jeden společný bod (průsečík), žádný společný bod (přímka jde mimo obrazec) nebo nekonečně společných bodů (přímka svou částí leží v obrazci). Naším úkolem je vyřešit, o kterou možnost se jedná, tedy stanovit průsečík přímky a rovinného obrazce. Mohli bychom sestřít stopy roviny, ve které leží obrazec, a úlohu řešit jako případ průsečíku přímky a roviny (strana AB; AC resp. BC – viz. Obr. 28, jsou též přímky, naleznou-li jejich stopníky, stopy musí procházet právě jimi – tak naleznou stopy roviny ve které obrazec leží). Tato konstrukce je však zdlouhavá (i když zprávná), proto použijeme elegantnějšího řešení, úpomocí krycích přímek.

Obr. 29

**Vyřešení úlohy pomocí krycích přímek postup + vysvětlení (viz Obr. 29):**

Přímkou, tedy jejím průmětem a_2 , proložíme přímku k , tedy průmět k_2 . Krycí přímka se promítá stejně jako přímka a v nárysu, kde prochází body K_2 a L_2 . Jelikož body K_2 a L_2 leží na stranách trojúhelníku, jsou právě těmito dvěma body, které určují přímku k . Abychom dostali první průmět krycí přímky k_1 , musíme nejprve nalézt body K_1 a L_1 – leží na ordinále a na příslušné straně trojúhelníku. Spojením bodů K_1 a L_1 dostaneme první průmět krycí přímky k_1 . Průsečík krycí přímky k a námi zkoumané přímky a , bod X , nám říká, zda-li přímka a prochází mimo trojúhelník nebo ho propichuje. Kdyby přímka k_1 splynula s přímkou a_1 , znamenalo by to, že část přímky a v obrazci leží. Leží-li bod X_1 na přímce k_1 resp. a_1 uvnitř obrazce (jako na Obr.29), je tento bod součástí plochy trojúhelníku – přímka a tedy prochází trojúhelníkem. Leží-li X_1 mimo plochu obrazce, znamená to, že a přímka a jde mimo trojúhelník.

V praxi mnohdy potřebujeme zjistit průsek dvou rovinných obrazců, třeba vnějších ploch tělesa a podobně. V prostoru mohou mít dva obrazce, které nejsou totožné, buď nekonečně mnoho společných bodů (protínají se na úsečce, křivce), jeden společný bod (dotýkají se v něm) nebo nemají žádný společný bod. Chceme-li vyřešit vztah dvou rovinných obrazců, postupujeme tak, že úlohu řešíme jako průsečík přímky a rovinného obrazce pomocí krycích přímek. Mohli bychom pochopitelně úlohu řešit jako průsečnici dvou rovin, ale to by ve většině případů bylo komplikovanější.



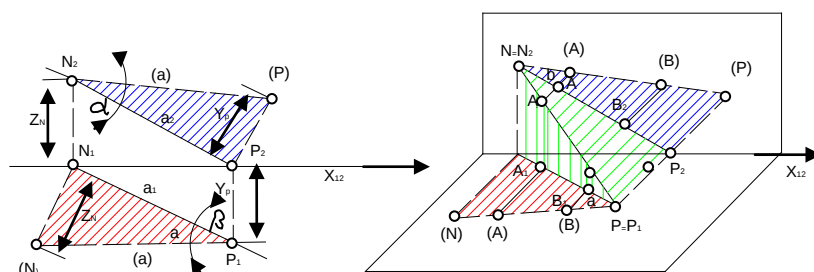
Obr. 30

Postup + vysvětlení řešení:

Na Obr. 30 je naznačen příklad, který je řešen právě pomocí krycích přímek. Stranou K_2M_2 proložíme krycí přímku k_2 . Na trojúhelníku ABC máme body R_2 a T_2 . Na ordinálách a příslušných stranách (pozor – nepoplést) nalezneme body R_1 a T_1 . Těmi prochází první průmět krycí přímky k_1 . Tím nalezneme průsečík $X_1 = k_1 \cap K_1M_1$. Stejným způsobem postupujeme i u strany K_2L_2 a nalezneme bod X_{12} . Na ordinálách pak leží body X_2 a X_{22} . Nyní nám zbývá ještě určit viditelnost. Zde si musíme představit trojúhelníky v prostoru a pohledem shora resp. zepředu zjistit, které body dříve vidíme – tedy jak jsou jednotlivé obrazce vidět a jak se navzájem zakrývají. Pro lepší názornost jsou trojúhelníky vyšrafované.

ODCHYLKY PŘÍMKY OD PRŮMĚTEN

V obecné poloze přímky vidíme pouze její průměty, kde nejenom vzdálenosti, ale i úhly, jsou zkreslené. Chceme-li znát jednotlivé úhly, které přímka svírá s průmětnami, musíme přímku do dané průmětny sklopit. Sklopím (otáčím) okolo průmětu přímky v dané průmětně. Sklopením do 1π dostaneme úhel α , sklopením do 2π dostaneme úhel β , což jsou odchylky od průmětny resp. nárysny. Postup sklápění vidíte dobře na Obr. 31. Sklopením vlastně celý trojúhelník PNN1 do půdorysny, kde již vidíme skutečné úhly i délky.



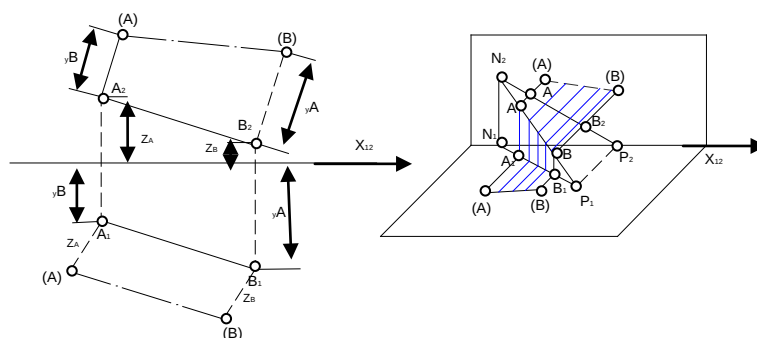
Postup + vysvětlení řešení:

V Mongeově promítání je postup zobrazen v levé části Obr. 31.

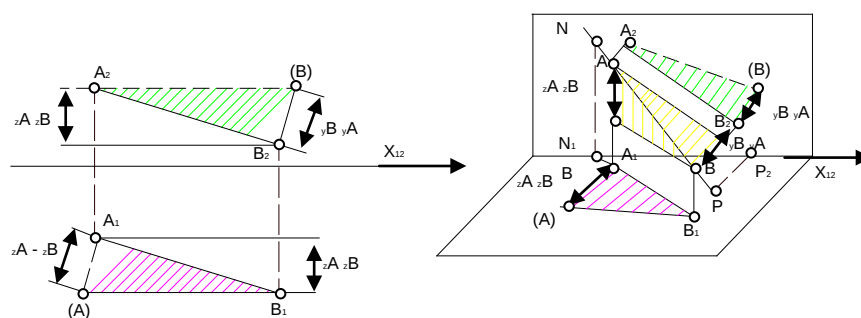
1. Nalezněte stopníky přímky a – body P a A
2. V bodě N_1 vynesete na kolmici souřadnici z_N a získáte bod (N) ve sklopení do půdorysny.
3. Spojte bod P_1 s bodem (N) , získáte sklopenou přímku (a) a úhel α , který svírá přímka s průmětnou (1π).
4. V bodě P_2 vynesete na kolmici souřadnici y_P a získáte bod (P) ve sklopení do nárysny.
5. Spojte bod N_2 s bodem (P) a získáte sklopenou přímku (a) a úhel β , který svírá přímka s nárysou (2π).

SKUTEČNÁ VELIKOST ÚSEČKY

Máme-li úsečku AB zobrazenou v Mongeově promítání a ta leží v obecné poloze, vidíme oba její průměty zkresleně. Abychom zjistili, jak velká je úsečka ve skutečnosti, musíme provést sklopení úsečky do průmětny (nebo do roviny rovnoběžné s průmětnou). Úsečky, stejně jako přímky, ve sklopení kreslíme čerchovanou čarou a body ve sklopení dáváme do závorky.



Obr. 32



Obr. 33

Postup + vysvětlení řešení:

Máme vlastně dvě možnosti, jak získat skutečnou velikost úsečky.

- a) Sklopením do půdorysny resp. nárysny (viz. Obr. 32)
 1. V bodě A_2 vyneste na kolmici souřadnici y_A a získáte bod (A) ve sklopení do nárysny
 2. V bodě B_2 vyneste na kolmici souřadnici y_B a získáte bod (B) ve sklopení do nárysny.
 3. Spojte bod (A) a (B) a dostanete skutečnou velikost úsečky AB
- b) Sklopením do roviny rovnoběžné s půdorysnou resp. nárysnu (Obr. 33)

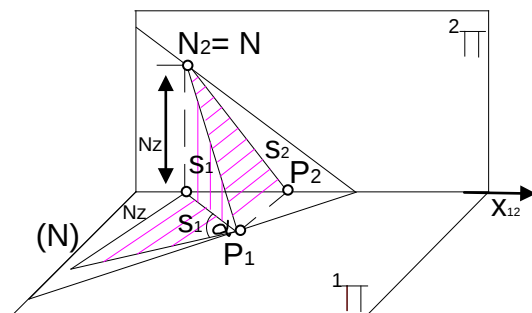
na Obr. 33 je provedeno sklopení do roviny rovnoběžné s nárysnu, která prochází bodem B (dá se říci, že jsem si nárysnu posunul o souřadnici y_B)

 - Jelikož bodem B prochází posunutá nárysna, nemusí se již tento bod sklápět, ale stačí sklopit pouze bod A (bod B se stal vlastně nárysným stopníkem).
 - 1. V bodě A vyneste na kolmici souřadnici bodu A zkrácenou o vzdálenost posunutí nárysny, tedy $y_A - y_B$.
 - 2. Spojte bod (A) s bodem B_2 a máte úsečku AB ve sklopení – skutečná velikost je zde $(A)B_2$.

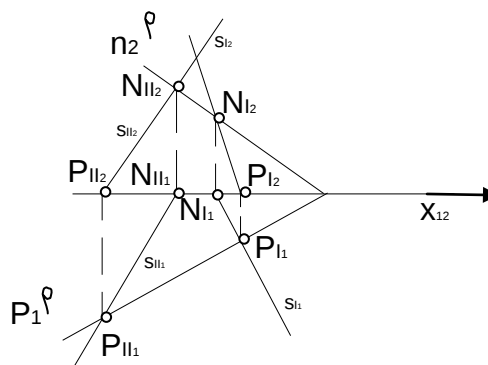
Poznámka: Stejně mohu postupovat, budu-li úsečku AB sklápět do půdorysny, pouze budu vynášet z souřadnice bodů.

SPÁDOVÉ PŘÍMKY ROVINY

Obr.34



Obr.35



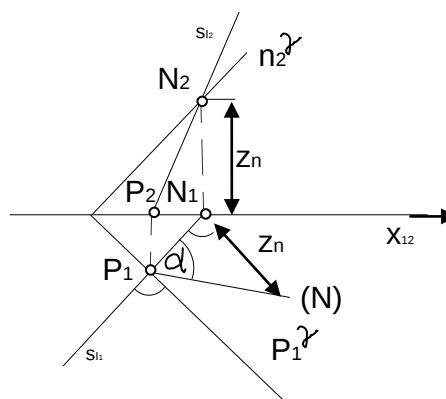
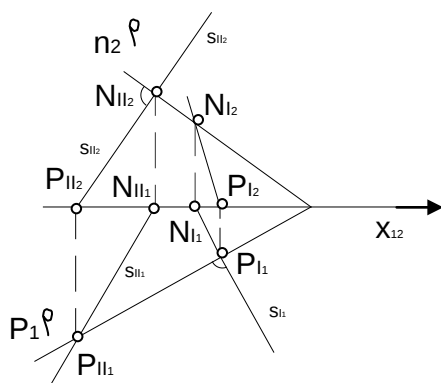
Spádové přímky roviny jsou takové přímky, které jsou kolmé na její hlavní přímky a tím pádem jsou zároveň kolmé na příslušné stopy roviny.

Spádové přímky první osnovy jsou kolmé na hlavní přímky první osnovy $s_1 \parallel h_1$, spádové přímky druhé jsou kolmé na hlavní přímky druhé osnovy $s_{II} \parallel h_{II}$.

Na Obr. 34 je naznačena spádová přímka první osnovy s_1 v prostorovém poromítání I její sdružené průměty s_{I1} a s_{I2} . Na Obr. 35 jsou pak naznačeny spádové přímky obou osnov v Mongeově promítání.

ODCHYLKY ROVINY OD PRŮMĚTEN

Chceme-li získat skutečnou velikost úhlu, který svírá rovina s danou průmětnou, musíme sklopit spádovou přímku příslušné osnovy do příslušné průmětny. Sklopením s_1 do půdorysny π_1 určíme úhel α , který svírá rovina s půdorysnou, sklopením s_{II} do nárysny π_2 určíme úhel β , který svírá nárysna s rovinou.



Odchylka roviny od půdorysny – postup (viz. Obr. 36):

1. V libovolném místě sestrojte první průmět spádové přímky první osnovy $s_{11} \perp p_{1p}$.
2. Nalezněte stopníky přímky P_1, P_2 a N_1, N_2 .
3. Druhými průměty stopníků P_2 a N_2 vedte druhý průmět spádové přímky první osnovy s_{12} .
4. V bodě N_2 naneste souřadnici z_N nalezněte bod (N) ve sklopení a následně úhel α , který svírá spádová přímka první osnovy s půdorysnou a tím pádem i rovina p s půdorysnou.

Odchylka roviny od nárysny – postup (viz. Obr. 37):

Postup je obdobný jako při sestrojování odchylky od půdorysny, pouze musím sestrojit spádovou přímku druhé osnovy $s_{12} \perp n_2$ a sklopit ji nárysny.

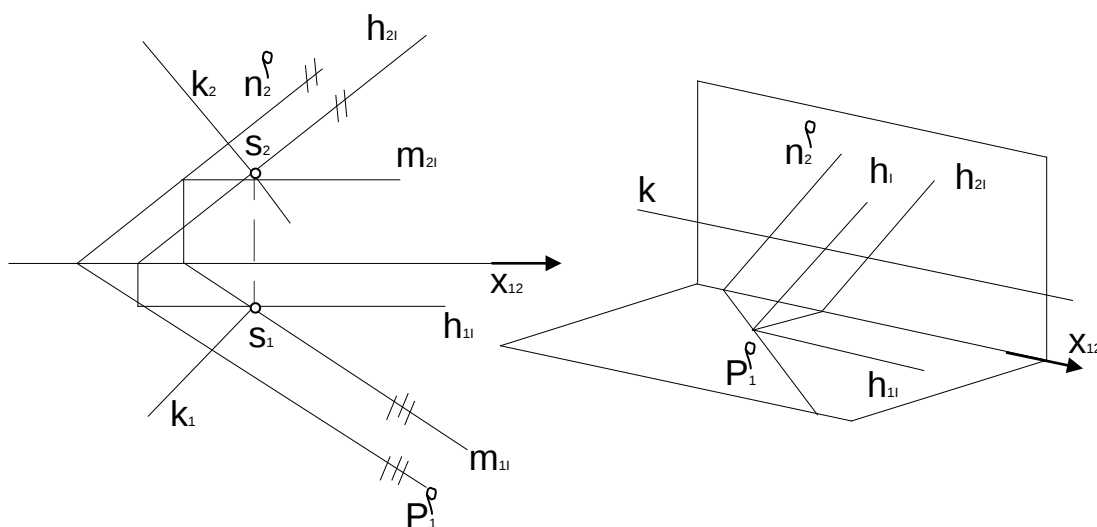
PŘÍMKA KOLMÁ K ROVINĚ

Přímka je kolmá k rovině, jestliže je kolmá ke dvěma různoběžným přímkám této roviny. Je-li dána rovina v obecné poloze, potom hlavní přímky obou osnov h_1 a h_{11} jsou různoběžnými přímkami roviny. Proto platí, že je-li přímka $k \perp h_1$ a zároveň $k \perp h_{11}$, je tedy $k \perp p$. Jelikož hlavní přímky jsou rovnoběžné s průmětnami, promítá se pravý úhel jako pravý (Pravý úhel se promítá jako pravý, je-li alespoň jedno rameno rovnoběžné s průmětnou a není-li jeho druhé rameno kolmé k průmětně). Z této poučky plyne, že musí platit $k_1 \perp h_{11}$ a $k_2 \perp h_{211}$, neboli $k_1 \perp p_{1p}$ a

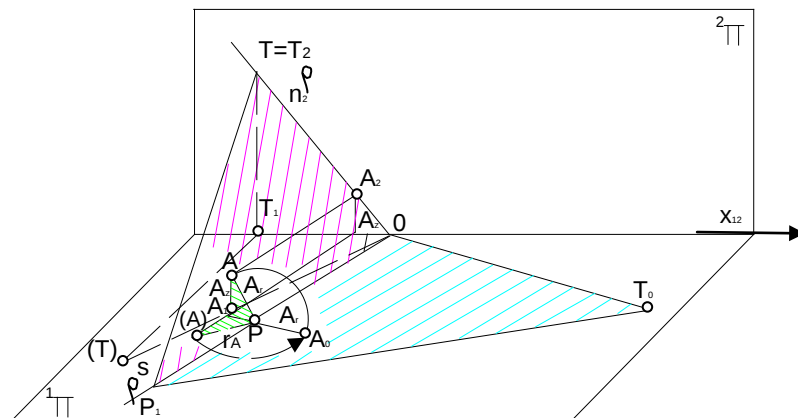
$k_2 \perp n_{2p}$. Z těchto poznatků lehce můžeme zkonstruovat přímku kolmou k rovině, jak je naznačeno na Obr. 38 (v pravé části pak I v prostorovém promítání).

Poznámka: Znalost konstrukce přímky kolmé k rovině můžeme pak využít, chceme-li znát například nejmenší vzdálenost bodu od roviny, konstrukce koule, která se dotýká roviny apod.

Obr. 38



Často se stává, že máme konstruovat různé obrazce (podstavy těles , řezu) v obecné rovině, kde je daný obrazec zkrešen. Proto použijeme otočení roviny.



Obr. 39

Vysvětlíme si nyní otáčky roviny p do úpřodorysny. Máme obecnou rovinu p a bod $A \in p$. Budeme otáčet rovinu p okolo stopy p_{1p} , která se tím pádem stává osou otáčení, do půdorysny. Přitom nás bude zajímat, kde bude ležet otočený bod A_0 . Body v otočení se značí indexem 0 (např. A_0 , B_0) a čáry v otočení kreslíme čerchovaně. Princip postupu je znázorněn na prostorovém obrázku 39, konstrukce v Mongeově promítání na Obr. 40. Sledujte nyní Obr. 39. Otáčení roviny p si můžete představit jako otočení její části tvořené trojúhelníkem SOT. Trojúhelník bude stále pevně stát na úsečce SO a okolo ní se bude otáčet tak dlouho, dokud vrchol T se nedotkne půdorysny. Spolu s plochou trojúhelníku se otáčí i bod A. Abychom mohli otočit bod A, potřebujeme znát poloměr otáčení r_A , který je přeponou trojúhelníku A_1PA . Skutečnou velikost r_A zjistíme sklopením trojúhelníku A_1PA do půdorysny – zde je shodný trojúhelník označený $(A)PA_1$.

OTÁČENÍ BODU

Příklad – zadání: Máme bod A a otočením roviny zjistěte polohu otočeného bodu A_0 .

$P(3;5;4)$

$A(0;2;?)$

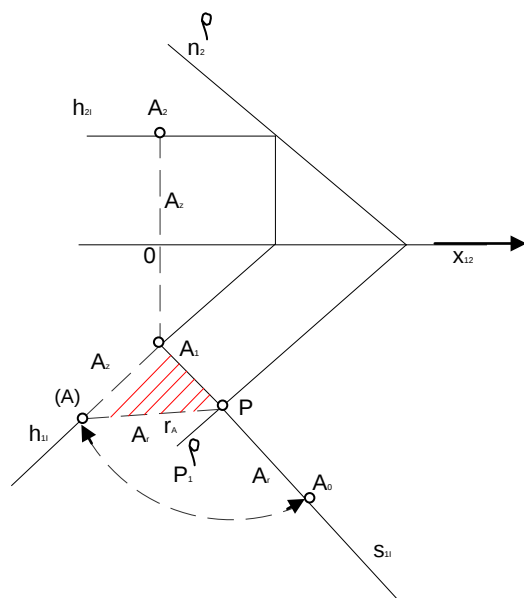
Postup-řešení: 1) Nakreslete rovinu p a bod A – Bod A_2 naleznete pomocí hlavních přímek první osy.

2) Na přímkou h_{11} naneste od bodu A_1 souřadnici A_z bodu A.

3) Z bodu A_1 spusťte kolmici na p_p (jde vlastně o spádovou přímkou s_{11} první osy); na průsečíku s_{11} a p_p leží bod P.

4) Spojte bod (A) s bodem P a naleznete poloměr otáčení bodu A – r_A .

5) Na kolmici s_{11} od bodu P vynesete poloměr otáčení r_A a naleznete bod A_0 , což je bod A otočený do půdorysny.



Obr. 40

ZPRACOVAL - PETR BYRTUS

2. díl

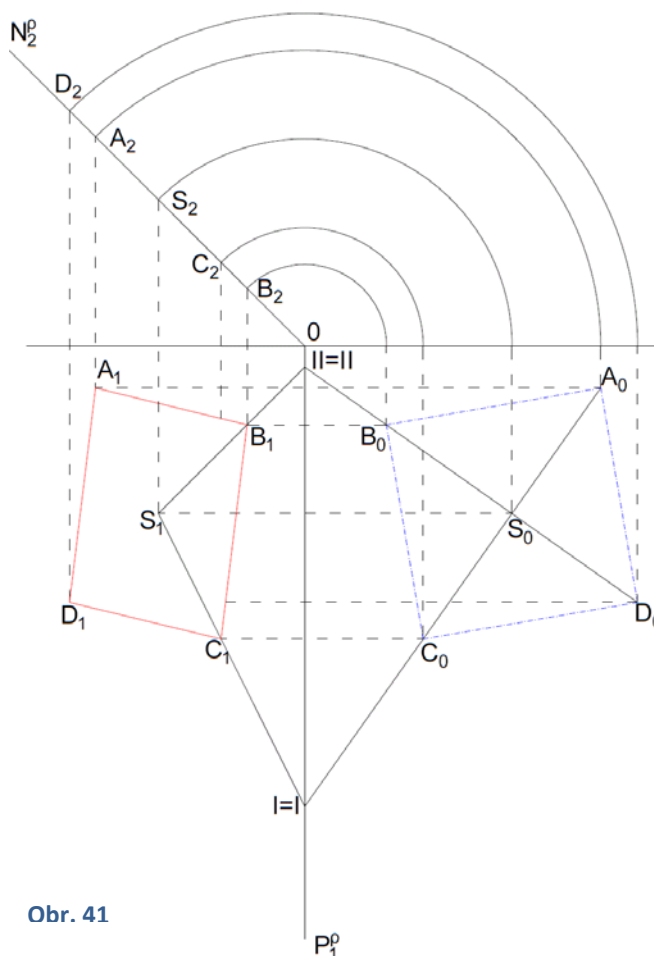
Při otáčení roviny platí jistá pravidla, která se dají shrnout do pojmu osová afinita. Abychom toto pochopili, ukážeme si řešení příkladu, kde se jisté zákonitosti objeví.

PŘÍKLAD - ZADÁNÍ (VIZ OBR. 41):

V rovině $p(0; 90; 135)$ určete sdružené obrazy čtverce, je-li dána jeho úhlopříčka AC. $A(-5; 1; ?)$, $C(-2; 7; ?)$.

POSTUP ŘEŠENÍ:

- 1) Sestrojte rovinu p - dle úhlů, měřeno od osy $x_{1,2}$ jde o rovinu, která je kolmá k nárysně - z toho plyne, že body A_2, C_2 leží na n_2 .
- 2) Potřebujete nyní rovinu otočit do půdorysny, abyste zde mohli nakreslit čtverec ve skutečné velikosti.
- 3) Rovinu otočte podél $p_1 = o$ do půdorysny
- 4) Body A_0, C_0 budou ležet na kolmicích k ose otáčení, to jest p_1
- 5) Vzdálenost A_0, C_0 od p_1 je zde poloměr kružnice, která má střed v počátku - bod O a velikost je OA_2 resp. OC_2 jelikož je rovina kolmá k nárysně, v tomto případě vidíme poloměr r_A resp. r_C přímo v nárysně).
- 6) Pomocí bodů A_0 a C_0 zkonstruuje čtverec, tedy chybějící body B_0 a D_0 .
- 7) Opačným způsobem, než jste získali body A_0 a C_0 pomocí kružnic o středu v bodě O a poloměry r_B resp. r_D . To v nárysu naleznete body B_2 a D_2 .
- 8) Na ordinále a na kolmici k p_1 leží potom body B_1 a D_1 (můžete též využít jednu z vlastností afinity a to, že spojnice dvou bodů se protínají na ose otáčení, např. A_1C_1 a A_0C_0 se protínají v bodě I , A_1B_1 a A_0B_0 v bodě II atd.).



Obr. 41

ZÁKLADNÍ PRAVIDLA OSOVÉ AFINITY

- body A_1 a A_0 , B_1 a B_0 atd. si odpovídají (jsou sdružené) tak, že přímky A_1A_0 , B_1B_0 atd. jsou vzájemně rovnoběžné a kolmé na osu otáčení o (p_1)
- bodu A_1 odpovídá jen jeden bod A_0
- přímkám a_1 , b_1 atd. odpovídají přímky a_0 , b_0 atd., přičemž sdružené přímky a_1 a a_0 se protínají na ose o
- leží-li bod A_1 na přímce m_1 , leží bod A_0 na přímce n_2
- osa otáčení $o = p_1$ je osa afinity
- na ose otáčení leží body $I = I_0$, $II = II_0$, které sobě odpovídají a nazývají se samodružné body (neotáčejí se, zůstávají na místě)
- rovnoběžným přímkám příslušejí v afinitě zase přímky rovnoběžné

- půlícímu bodu S_1 úsečky A_1B_1 je přiřazen půlící bod S_0 úsečky A_0B_0
- na rovnoběžkách s osou afinity se zachovává délka úsečky
- pravému úhlu zpravidla neodpovídá pravý úhel

ŘEZ HRANOLU ROVINOU

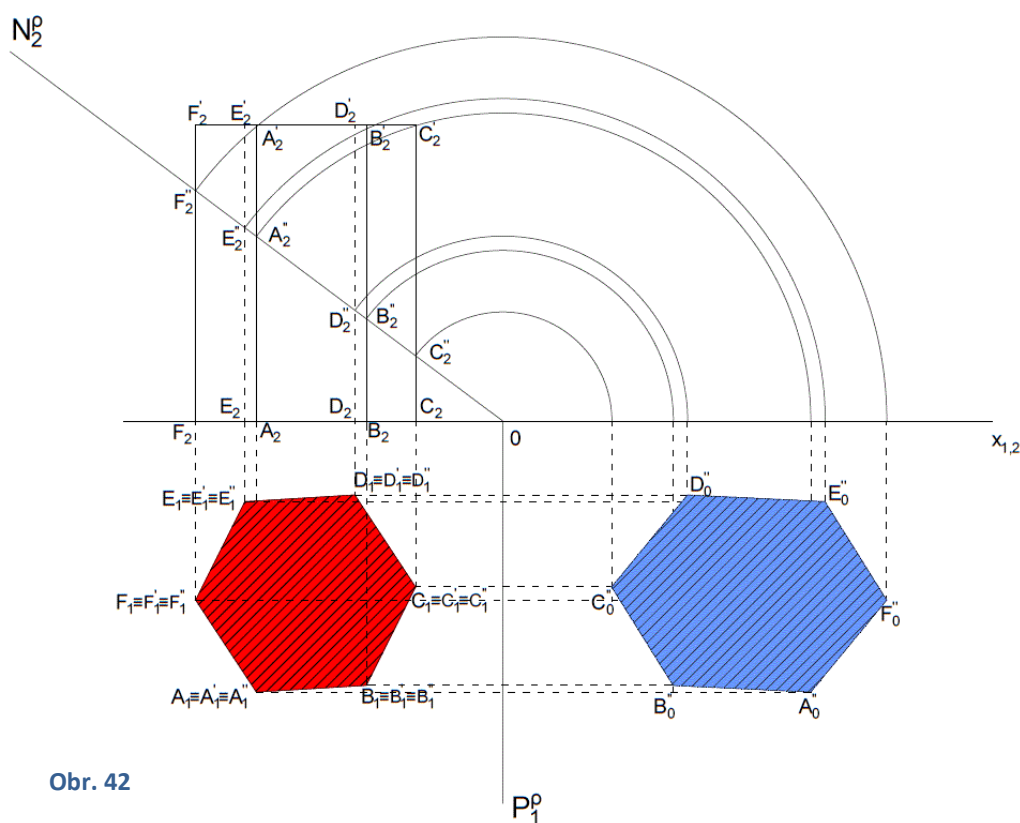
Rovina, která protíná hrany hranolu, má s hranolem společný mnohoúhelník, tzv. řez nebo průsek hranolu rovinou. Vrcholy tohoto mnohoúhelníka jsou na hranách hranolu a strany na stěnách hranolu. Řezy jsou důležité i z hlediska sestrojování pláště seříznutého tělesa, tzv. sítě těles. S tím se seznámíme později na příkladu řezu.

PŘÍKLAD - ZADÁNÍ:

Pravidelný šestiboký hranol má podstavu v půdorysně. Střed $S(-2; 3,5; 0)$, vrchol $A(-3; 5,5; 0)$ a výška $v = 6$. Zobraďte řez hranolu rovinou $p(2; \infty; 1,5)$ a určete skutečnou velikost řezu.

POSTUP ŘEŠENÍ(VIZ OBR. 42):

- 1) Sestrojte hranol a stopy roviny - rovina kolmá k nárysně. A_1, A_2 - první podstava A'_1, A'_2 - druhá podstava
- 2) Řezem v tomto případě je šestiúhelník - body řezu značíme A''_1, A''_2 .
- 3) Vzhledem k poloze hranolu vám první průmět řezu splývá s prvním průmětem podstavy $A_1 \equiv A'_1 \equiv A''_1$.
- 4) Vzhledem ke kolmosti roviny k nárysně vám druhý průmět řezu představuje úsečka $C''_2F''_2$.
- 5) Velikost řezu sestojíte
 - a) sklopením roviny p do druhé průmětny (náryсны)
 - b) otočením roviny do první průmětny (půdoryсны) - viz na obr. 42 čerchovaný šestiúhelník vpravo dole, kde $p_1^p = o$

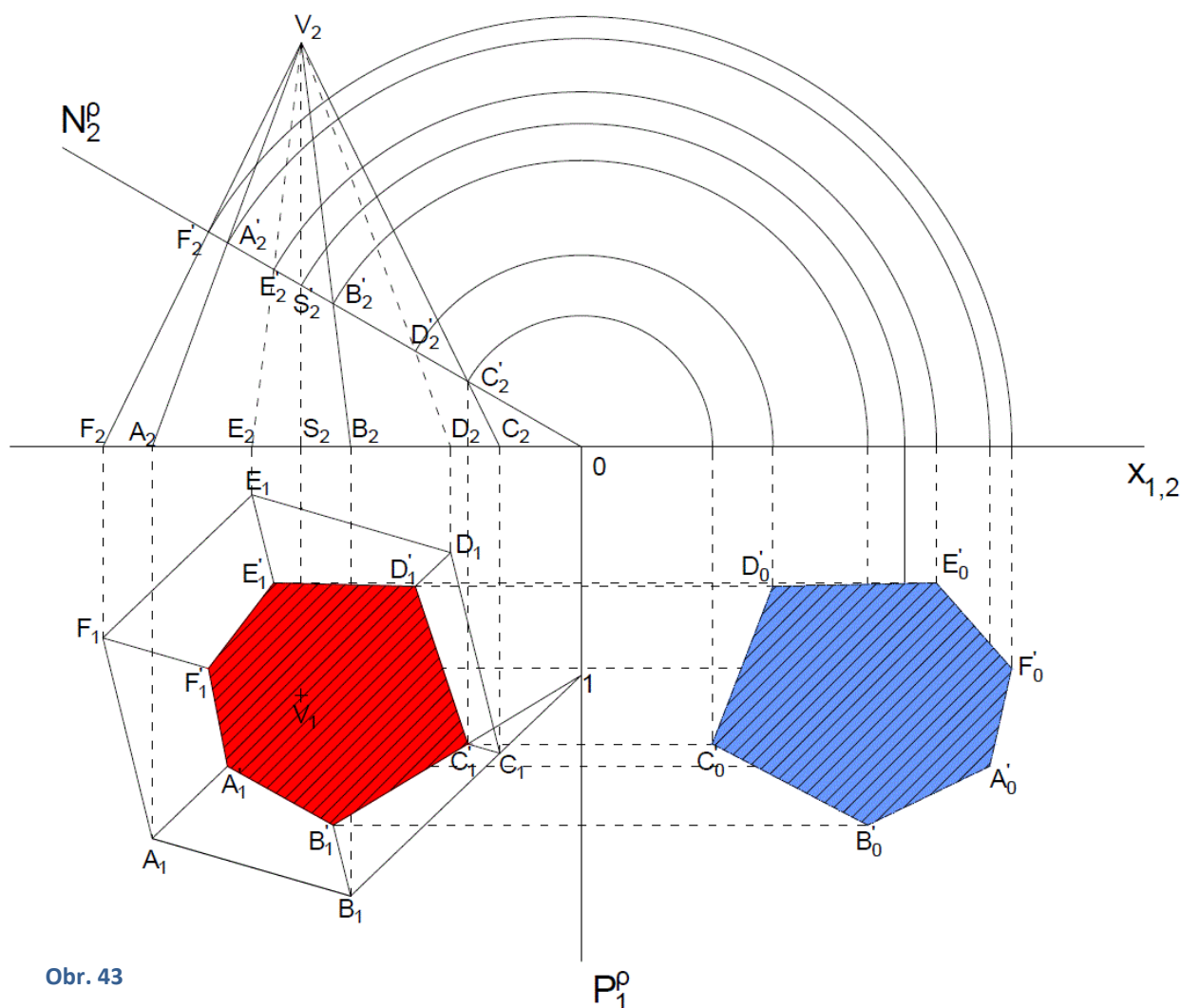


Obr. 42

Na následujícím případě si ukážeme řez jehlanu rovinou a zákonitosti, které při tomto řezu platí a které se nazývají středová kolineace. Znalosti těchto zákonitostí nám zjednoduší práci při sestřování řezu jehlanu.

PŘÍKLAD - ZADÁNÍ:

Pravidelný šestiboký jehlan má podstavu ABCDEF v půdorysně a vrchol $V(0;4;6,5)$. Zobrazte řez jehlanu rovinou a určete skutečnou velikost řezu, je-li dáno - $p(4,5; 90; 150)$, $A(-2,4; 6,3; 0)$.



Obr. 43

POSTUP ŘEŠENÍ + VYSVĚTLENÍ:

- 1) Sestrojte jehlan a rovinu p , která je kolmá k nárysně
- 2) Řezem zde je šestiúhelník $A'B'C'D'E'F'$ - v náryse se jeví jako úsečka C_2F_2 .
- 3) Určete první průmět řezu v půdorysu - body řezu na průsečíku příslušné ordinály a površky - $A'_1 = A_1V_1$ x ordinála bodu A' . Tato metoda však nemusí být vždy přesná, protože ordinála a površka jsou téměř rovnoběžné.

4) Využijte proto středovou kolineaci máme tři roviny

- a) rovina podstavy ${}^1\pi$
- b) rovina stěny jehlanu BCV
- c) rovina řezu ρ

Tyto roviny se protínají ve třech přímkách

a) $BC = {}^1\pi \times BCV$

b) $p_1 = \rho \times {}^1\pi$

c) $B'C' = \rho \times BCV$

Tyto tři přímky procházejí jedním bodem - 1 (tři obecné roviny mají společný právě jeden bod - v našem případě bod 1)

5) Stejným způsobem, kterým jste určili bod C'_1 můžete určit i body A'_1, E'_1 atd.

6) Sestrojte skutečnou velikost řezu otočením roviny ρ do ${}^1\pi$ (s použitím osové afinity - viz obr. 43).

STŘEDOVÁ KOLINEACE

Je to příbuznost, při níž platí:

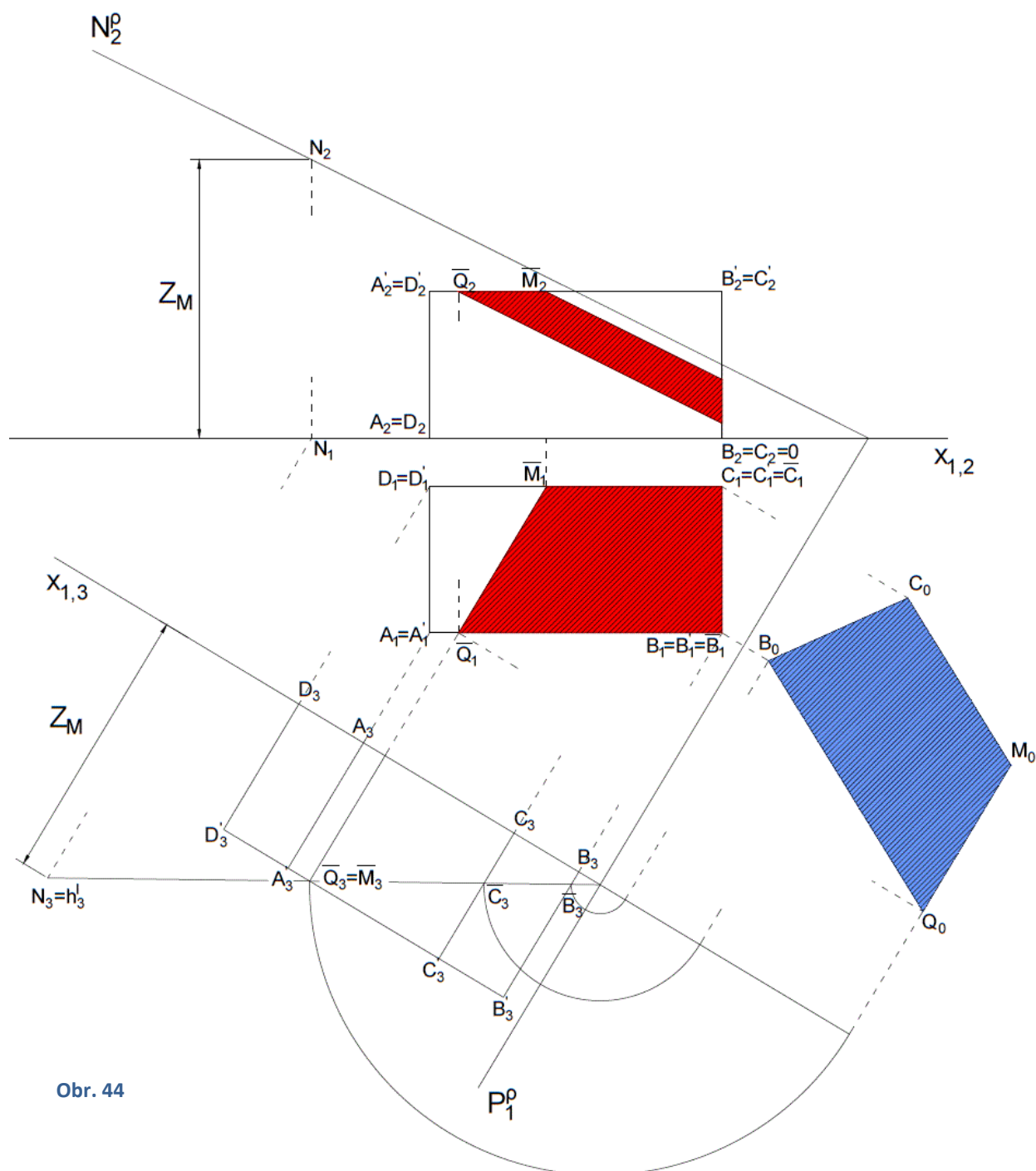
- sdružené body $A, A'; B, B'$ atd. leží na přímkách, které procházejí týmž bodem - středem kolineace, kterým je vrchol V
- sdružené přímky $(a \times a', b \times b')$ se protínají v bodech téže přímky - této přímce říkáme osa kolineace (leží na ní 1,2 atd.)

Věta: Mezi dvěma mnohoúhelníky $ABC... a A'B'C'...$ řezu jehlanové plochy rovinami $\rho \neq \sigma$ a existuje vztah středové kolineace, přičemž osou středové kolineace je průsečnice rovin ρ a σ a středem kolineace je vrchol jehlanové plochy (u nás osa kolineace $o_K = p_1^{\rho} = \rho \times {}^1\pi$, střed kolineace V_1)

Postup v tomto případě si opět ukážeme na příkladu.

PŘÍKLAD - ZADÁNÍ:

Sestrojte řez kvádru v základní poloze rovinou p . Kvádr značte $ABCD A' B' C' D'$. Je dáno $p(3;5;1,5)$, $A(-6;4;0)$, $B(0;4;0)$, $AA' = 3$, $C(0;1;0)$.



Obr. 44

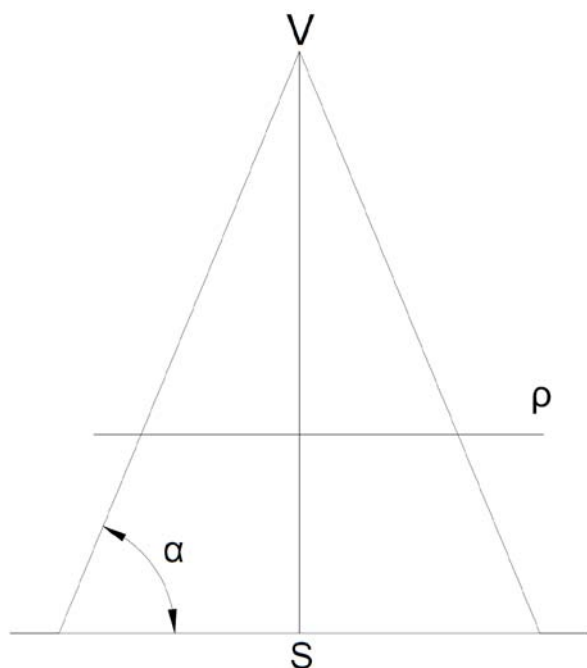
POSTUP ŘEŠENÍ + VYSVĚTLENÍ (VIZ OBR.44):

- 1) Sestrojte rovinu a hranol.
- 2) Zvolte třetí pomocnou průmětnu tak, aby byla současně kolmá k $^1\pi$ i k rovině řezu p ; jinými slovy zvolíme novou základnici $x_{1,3} \perp p_1^p$ (v libovolném místě).
- 3) Sestrojte třetí (pomocný) průmět tělesa (ozn. A_3, C_3 atd., ordinála A_1A_3 kolmá na $x_{1,3}$).
- 4) Sestrojte průsečnici roviny a pomocné průmětny - třetí stopu m_3^p - zvolte libovolný bod na stopě n_2^p (N_2) a sestrojte v něm hlavní přímkou první osnovy h^I - průmět $h_3^I \equiv N_3$ se jeví jako bod, a právě tímto bodem musí procházet stopa m_3^p .
- 5) Sestrojte pomocný průmět řezu - úsečka (úloha se mění na úlohu, kdy je rovina kolmá k průmětně a proto se všechny body roviny promítají do jediné přímky - stopy roviny - zde teď řešte v pomocném souřadném systému).
- 6) Pomocí ordinál (k základnici $x_{1,3}$) odvoďte první průmět řezu Q_1M_1 .
- 7) Pomocí ordinál (k základnici $x_{1,2}$) a za pomoci souřadnice z bodů odvoďte druhý průmět řezu - např. na obr. 44 naznačena konstrukce bodu C_2 za pomoc z_0 - tím dostanete body C_2, B_2, M_2, Q_2 .
- 8) Skutečnou velikost řezu sestrojíte např. otočením roviny řezu p do půdorysny.

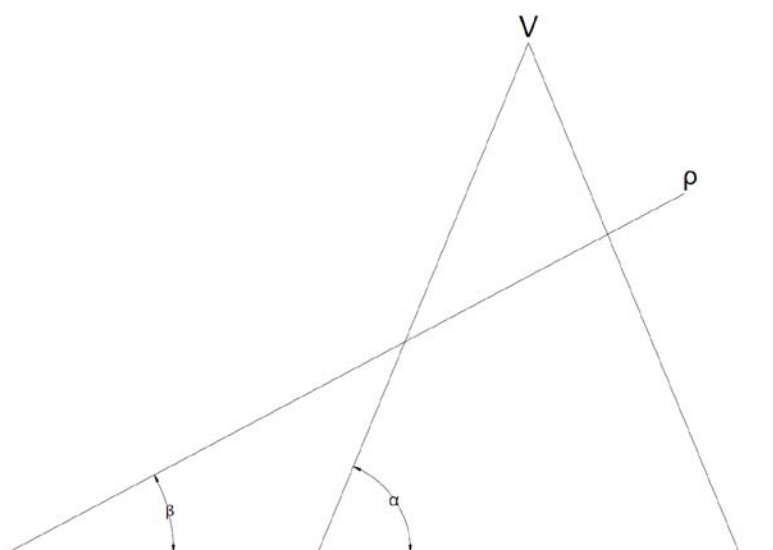
VZNIK KUŽELOSEČKY

Jak vlastně vznikají kuželosečky máme naznačeno na obrázku 45. Probereme si nyní jednotlivé případy.

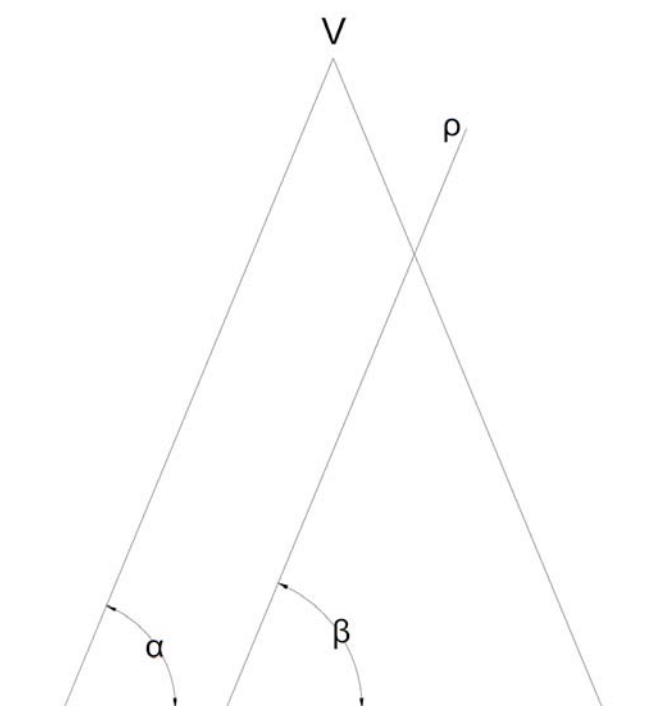
- 1) Řezem je kružnice - rovina je rovnoběžná s podstavou kužele - viz obr. 45a.
- 2) Řezem je elipsa - polohu roviny nám značí úhel β , když platí, že $\alpha > \beta > 0$, viz obr. 45b.
- 3) Řezem je parabola - rovina je rovnoběžná s površkou kužele - $\alpha = \beta$, viz obr. 45c.
- 4) Řezem je hyperbola - polohu roviny značí úhel β , když platí, že $\alpha < \beta < 90^\circ$ viz obr 45d.



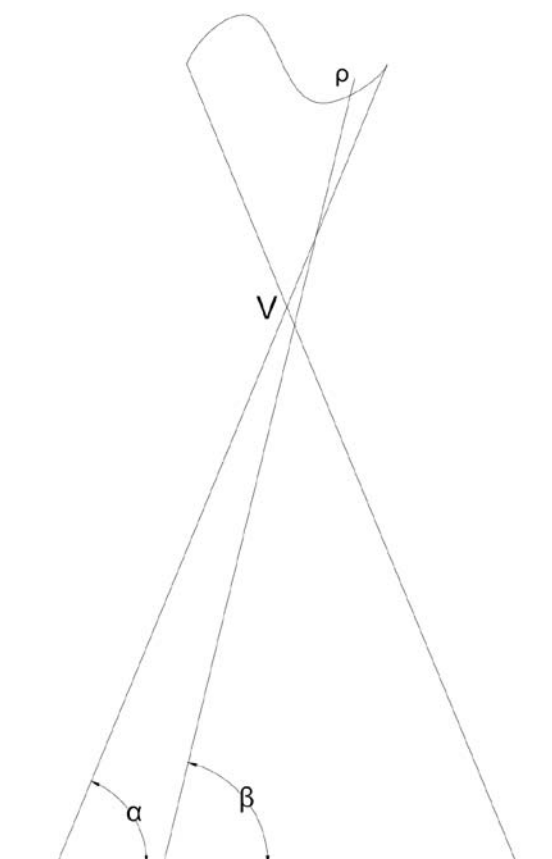
Obr. 45a



Obr. 45b



Obr. 45c



Obr. 45d

Elipsa je množina všech bodů, které mají od dvou daných různých bodů stálý součet vzdáleností větší než vzdálenost daných bodů. Oba dané body nazýváme ohniska (značíme F_1, F_2) Spojnice bodů elipsy od ohniska se nazývá průvodič (značíme r).

DALŠÍ ÚDAJE: (VIZ OBR 46A)

A, B - hlavní vrcholy elipsy

C, D - vedlejší vrcholy elipsy

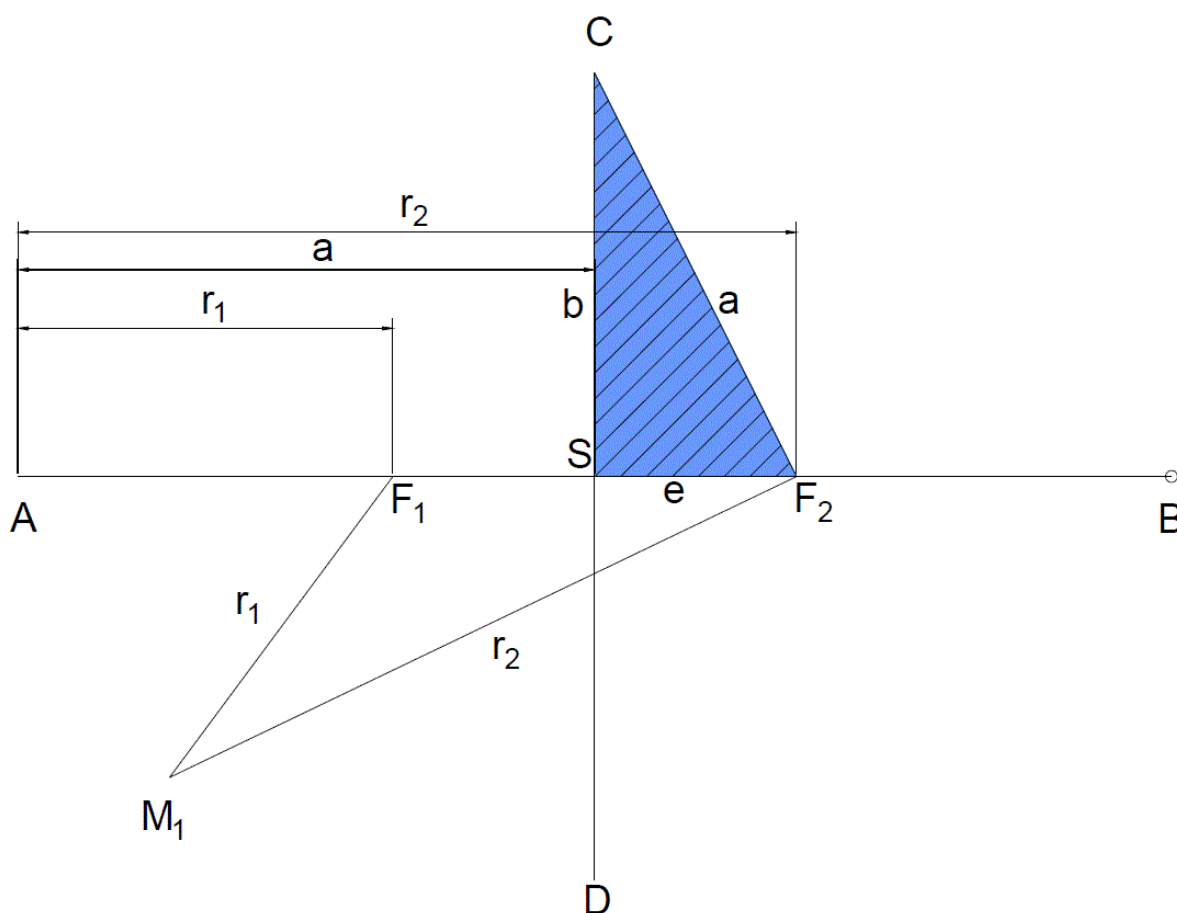
AB - hlavní osa elipsy

CD - vedlejší osa elipsy

a - velikost hlavní poloosy

b - velikost vedlejší poloosy

e - excentricita - vzdálenost ohniska od středu elipsy



Obr. 46a

ZÁKLADNÍ VZTAH

$$AF_1 + AF_2 = BF_1 + BF_2 = AB = 2a$$

$$a^2 = b^2 + e^2$$

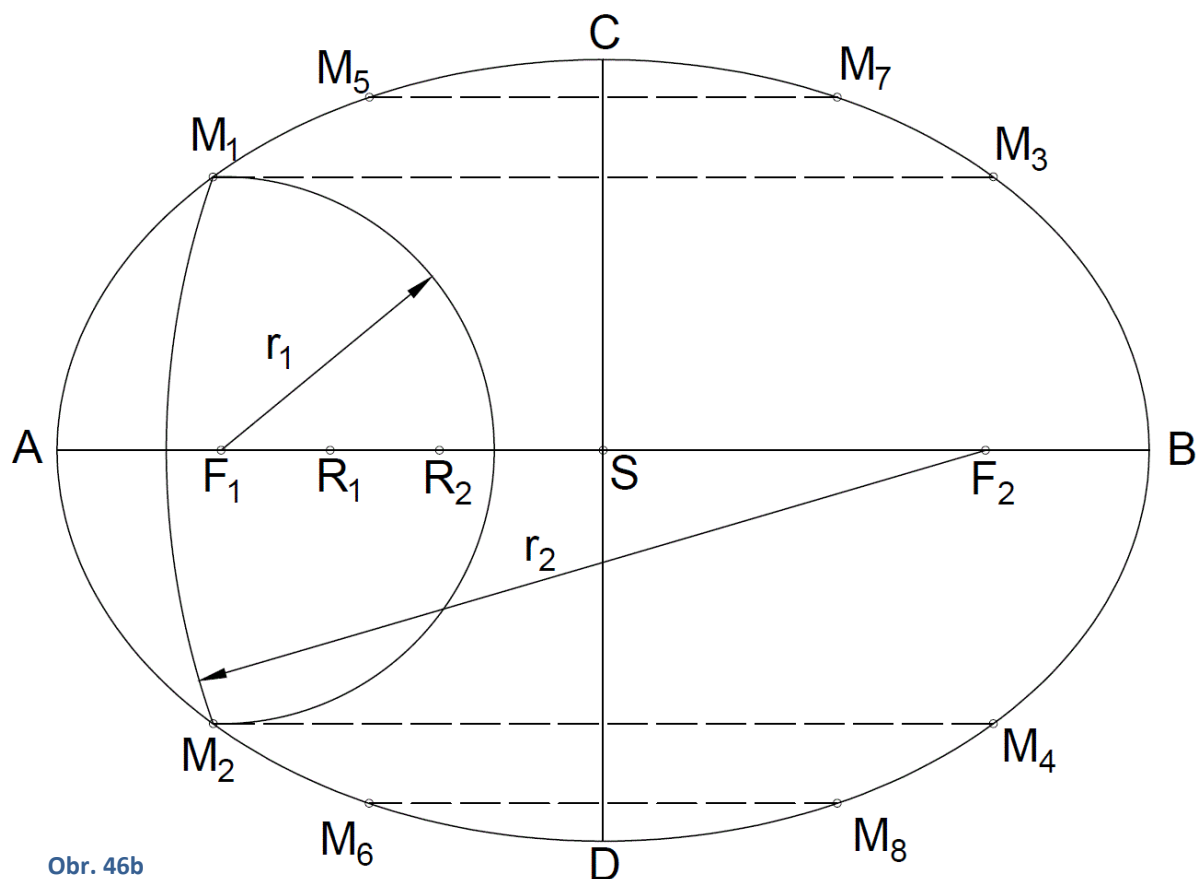
$$r_1 + r_2 = 2a$$

BODOVÁ KONSTRUKCE ELIPSY:

(vychází z definice - konstrukci provedte dle návodu)

PŘÍKLAD - ZADÁNÍ:

Sestrojte elipsu, znáte-li ohniska F_1, F_2 ($F_1F_2 = 70$) a součet průvodičů $AB = 100$



Obr. 46b

POSTUP ŘEŠENÍ:

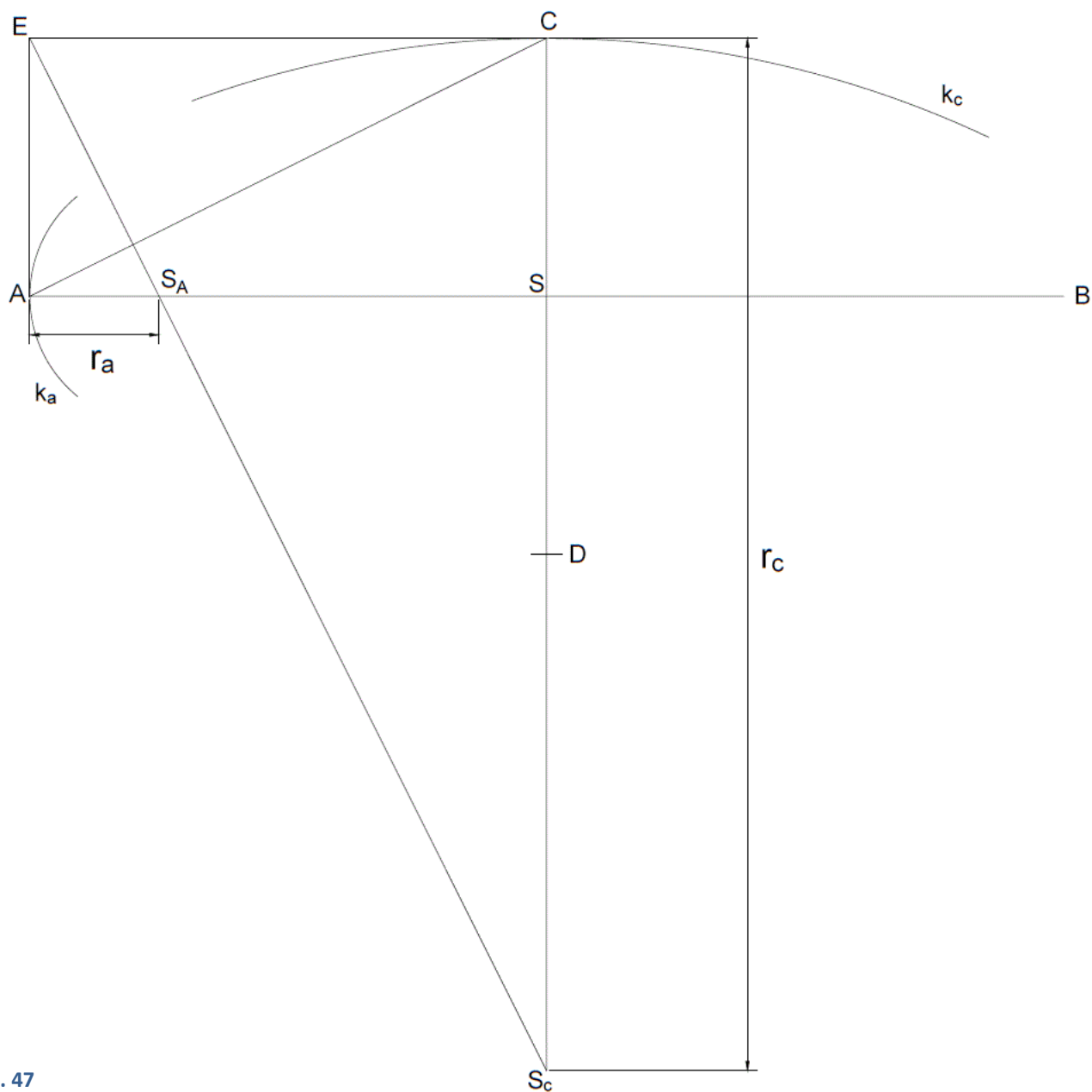
- 1) Nakreslete úsečku AB, najděte střed S, vyznačte F_1, F_2 ($F_1S = F_2S$).
- 2) Najděte vedlejší vrcholy ($R_1 = R_2 = a$) - průsečík průvodičů body C, D.
- 3) Zvolte bod R_1 (R_2 , atd.) tak, že platí $R \in F_1F_2$ (leží mezi ohnisky)! Bod R, rozdělí úsečku AB na dva úseky r_1, r_2 .
- 4) Pomocí průsečíků průvodičů r_1, r_2 sestrojujte body elipsy (symetrické podle dvou os - najdeme-li bod M_1 , symetricky leží M_2, M_3, M_4).
- 5) Volte další body R.

KONSTRUKCE ELIPSY POMOCÍ HYPEROSKULAČNÍCH KRUŽNIC

Tato metoda je založena na tom, že části elipsy u vrcholů nahradíme pomocí kružnic které nazýváme hyperoskulační.

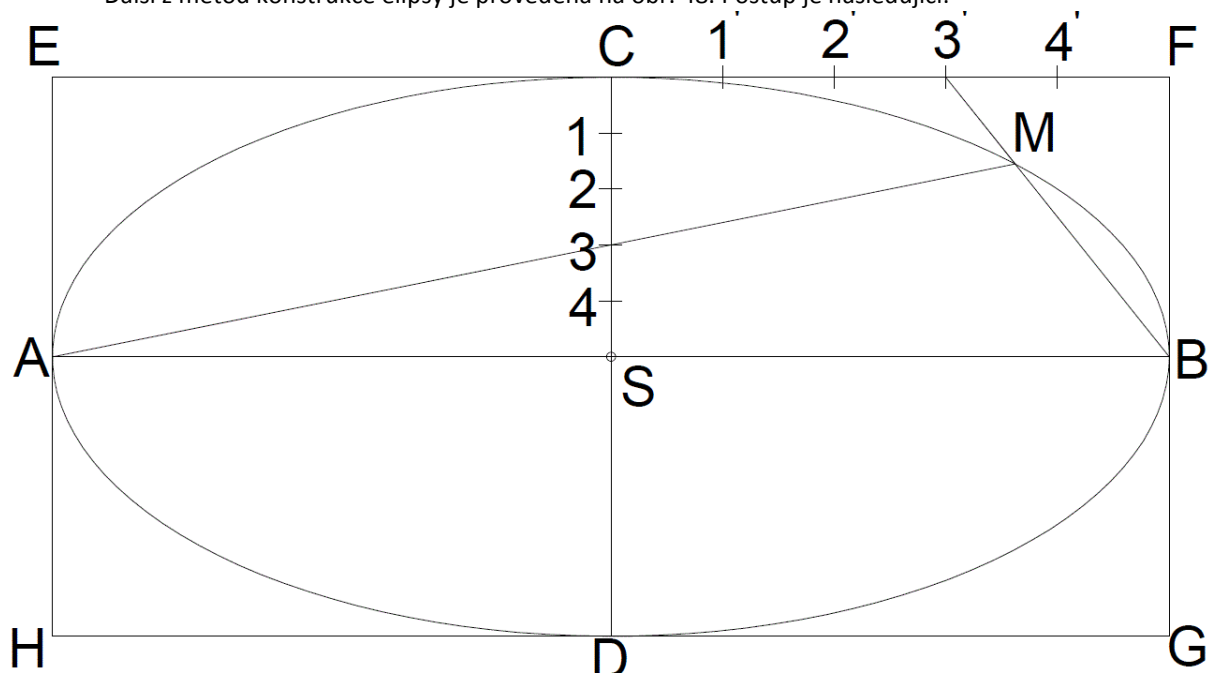
Kružnice na sebe nenavazují, proto zbytek musíme dokreslit pomocí křivítek nebo si vypomoci několika body získanými třeba bodovou konstrukcí.

Středy hyperoskulačních kružnic získáme dle konstrukce naznačené na obr. 47. V bodech C a A vztýčíme kolmici na úsečku CS respektive AS, v průsečíku těchto kolmic leží bod E. Z bodu E spustíme kolmici na úsečku AC a průsečík této kolmice s úsečkou AS nám dává střed hyperoskulačních kružnic S_A a s přímkou CS pak střed hyperoskulační kružnice S_C a poloměry jsou pak r_A a r_C .



Obr. 47

Další z metod konstrukce elipsy je provedena na obr. 48. Postup je následující:



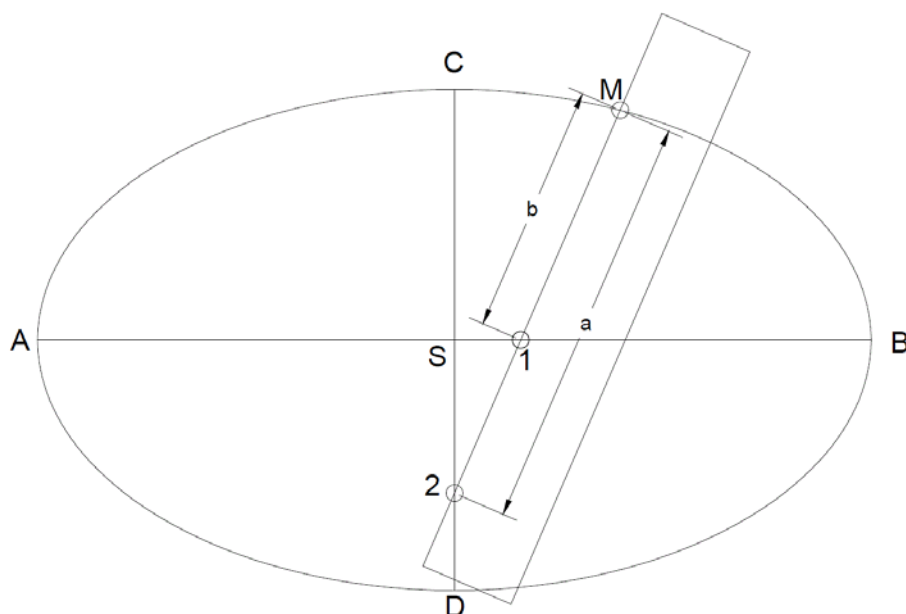
Obr. 48

- 1) Úsečku CF rozdělte na libovolný počet dílků.
- 2) Úsečku SC rozdělte na stejný počet dílků.
- 3) Body označte dle obr. 48 - od bodu C čísla stoupají.
- 4) Spojte bod A s bodem 3 na úsečce SC a bod B s bodem 3 na úsečce CF.
- 5) Průsečík $A3 \times B3' = M \Rightarrow M$ je bod elipsy.
- 6) Pokračujte dále ve spojování dalších příslušných bodů a získáte další body elipsy - čím víc bodů na úsečkách CF resp. SC, tím přesnější konstrukce.

PROUŽKOVÁ KONSTRUKCE ELIPSY

Tato metoda je nepřesná, ale velice rychlá a stačí nám k tomu proužek papíru. Konstrukce je naznačena na obr. 50.

Vezměte proužek papíru s přímým okrajem a zvolte na něm bod 2. Od tohoto bodu 2 naneste délku hlavní poloosy a získáte bod M. Od bodu M zpět směrem k bodu 2 naneste délku vedlejší poloosy a dostanete bod 1. Pohybujete-li papírem tak, že bod 2 vždy leží na vedlejší poloose a bod 1 vždy ležel na hlavní poloose, pak bod M opisuje elipsu. Vám již nezbyvá nic jiného, než značit jednotlivé polohy bodu M a jejich spojením vytvoříte elipsu.



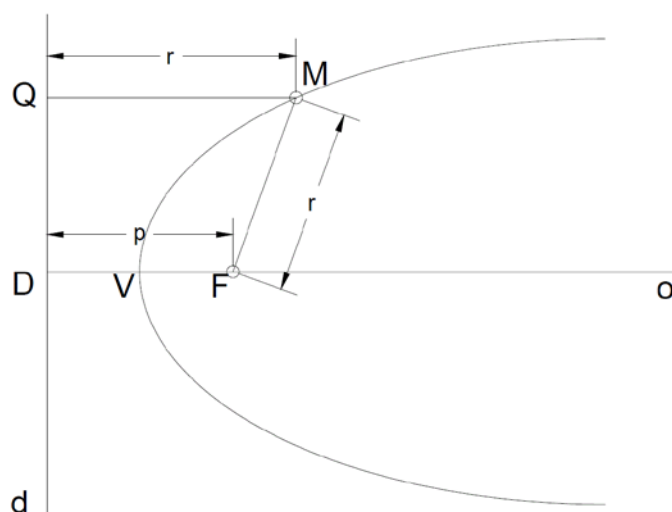
Obr. 49



PARABOLA

Parabola je množina všech bodů v rovině, které mají od pevného bodu F a pevné přímky d , která tímto bodem neprochází, stejné vzdálenosti. Viz obr. 50. Bod F nazýváme ohnisko a přímku d řídící přímkou paraboly.

Vzdálenost bodu F od přímky d , tedy $FD = p$, se nazývá parametr paraboly a značí se p . Přímka DF je osou paraboly, označení o , bod V je vrchol paraboly, přičemž platí $VD = VF = 1/2p$. Úsečky $QM = FM = r$ jsou průvodiče bodu M .

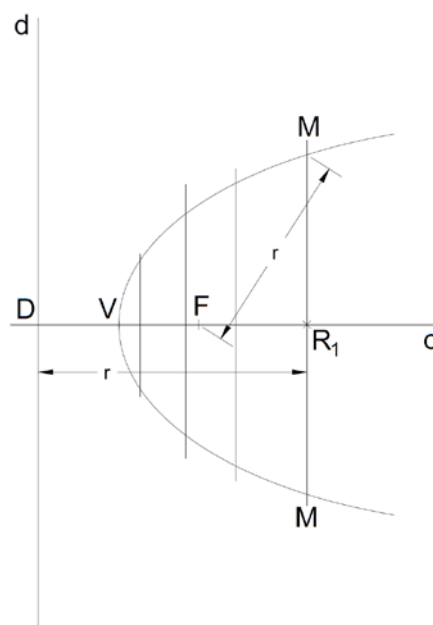


Obr. 50

BODOVÁ KONSTRUKCE PARABOLY

Je naznačena na obrázku 51. Máme např. dáno ohnisko F , osu o a parametr p .

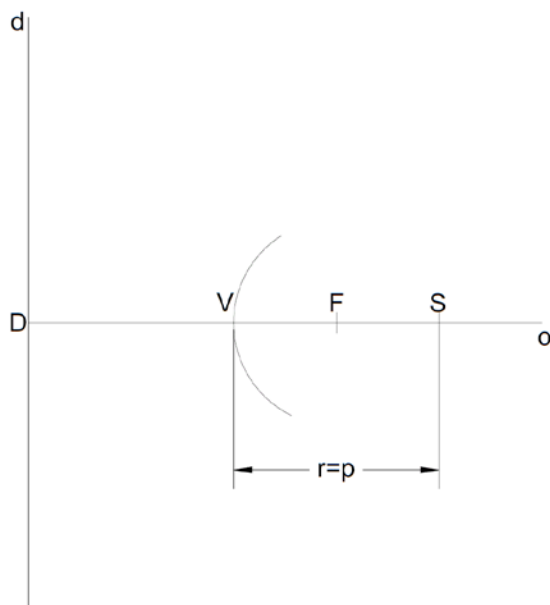
- 1) Sestrojte řídící přímku d a vrchol V dle definice z předešlého odstavce.
- 2) Body paraboly dále sestavujete tak, že v libovolném místě R_1 polopřímky VF vedte rovnoběžku s přímkou d .
- 3) Do kružítka vezměte velikost parametru, tedy $r = DR_1$ a z bodu F opišeme kružnici o poloměru r .
- 4) V místě průsečíku přímky procházející bodem R_1 a kružnice, leží hledané body M . Jsou dva, souměrné podle osy o .
- 5) Zvolte bod R_2, R_3 atd. a postupujte dále, až máte dost bodů paraboly, abyste mohli pomocí křivítka sestrojit hledanou parabolu. Čím je více bodů, tím je pochopitelně konstrukce přesnější.



Obr. 51

KONSTRUKCE POMOCÍ HYPEROSKULAČNÍ KRUŽNICE

Tato konstrukce je velice jednoduchá a je naznačena na obr. 52. Platí totiž, že střed hyperoskulační kružnice S leží na ose o a to ve vzdálenosti parametru p od vrcholu V .

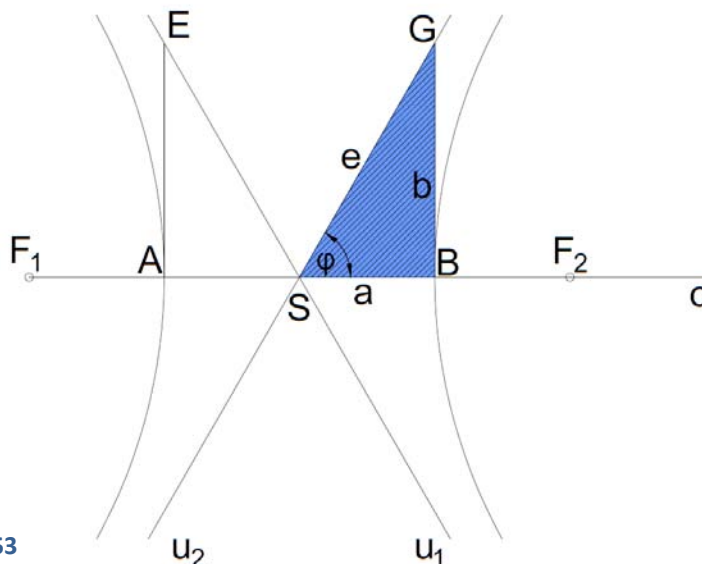


Obr. 52

Hyperbola je množina všech bodů v rovině, které mají od dvou různých daných bodů této roviny stálý kladný rozdíl vzdálenosti menší než vzdálenost daných bodů. Oba pevné body nazýváme ohniska - F_1, F_2 . Střed hyperboly S leží ve středu úsečky F_1F_2 .

Dále platí (viz obr. 53):

- $SF_1 = SF_2 = e$ - excentrická (výstřednost)
- konstantní rozdíl vzdálenosti: $2a = AB$
- velikost hlavní poloosy: $a = SA = SB$
- vrcholy hyperboly - A, B
- asymptoty hyperboly - u_1, u_2
- $b^2 = e^2 - a^2$
- $tg \varphi = \frac{b}{a}$
- $F_2A - F_1A = F_1B - F_2B = 2a$ - důkaz že platí podmínka rozdílů vzdáleností.



Obr. 53

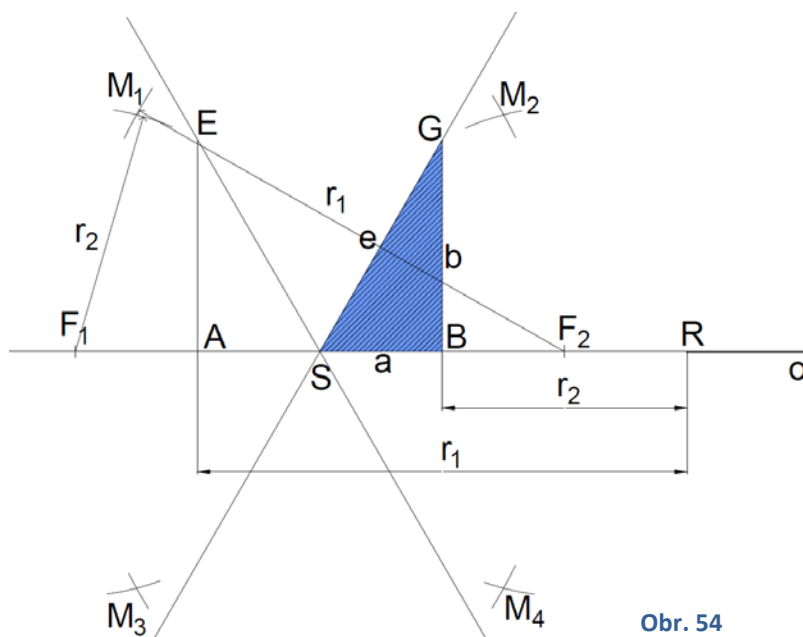
BODOVÁ KONSTRUKCE HYPERBOLY (VIZ OBR. 54):

PŘÍKLAD - ZADÁNÍ:

Dáno $F_1F_2 = 40, 2a = 20$.

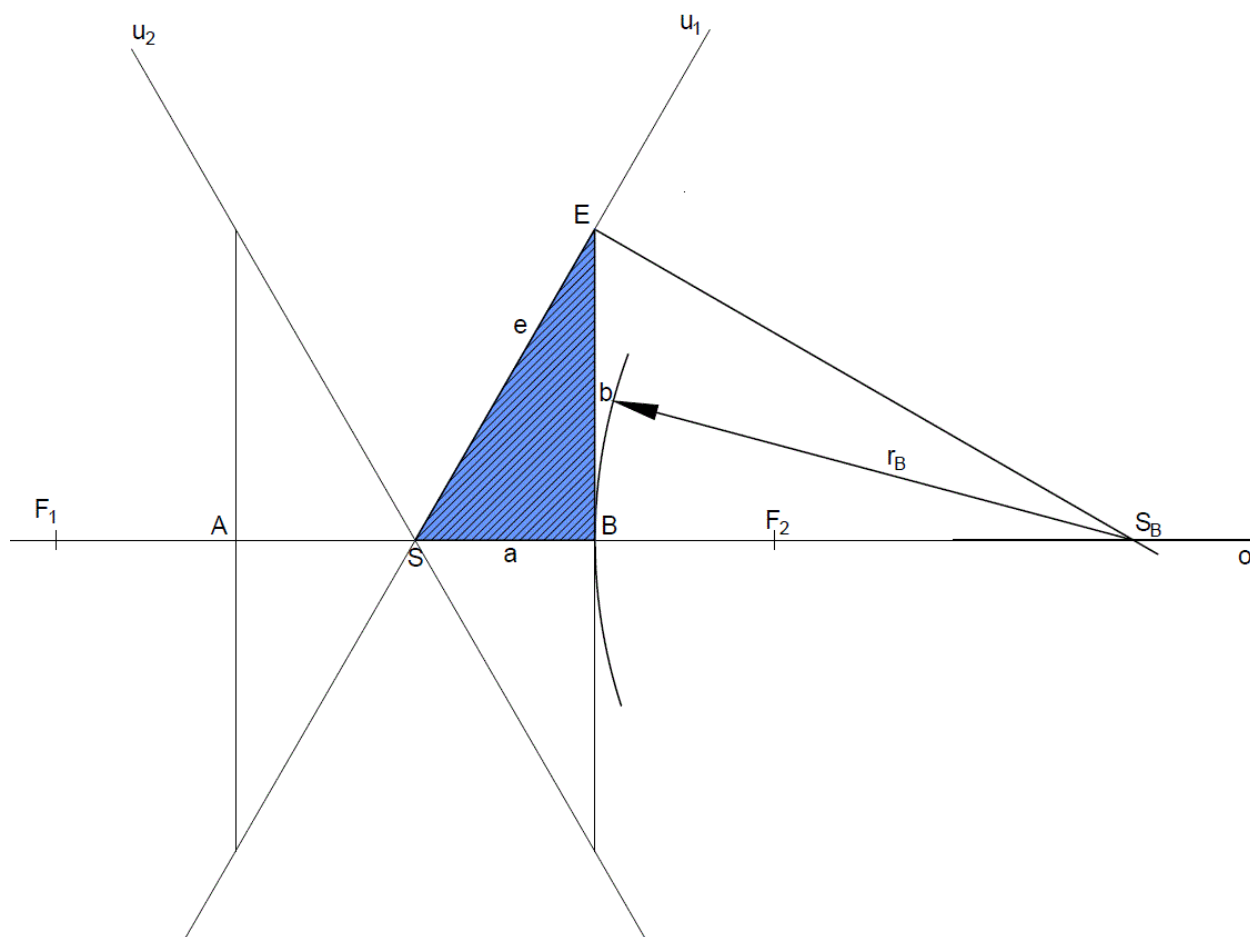
POSTUP ŘEŠENÍ:

- 1) Sestrojte ohniska, vrcholy a střed hyperboly
- 2) Sestrojte asymptoty - v bodě B vztýčte kolmici BE, do kružítka vezměte vzdálenost $SF_1 = e$ a opište kružnici ze středu S. V průsečíku této kružnice a kolmice BE leží bod E, kterým asymptota prochází - druhá symetricky.
- 3) Na ose o vně úsečky F_1F_2 zvolte libovolný bod R. Vzdálenost $AR - BR = 2a$. Pak vzdálenosti $AR = r_1$ a $BR = r_2$ jsou velikostmi průvodičů bodu M.
- 4) Z ohniska F_1 opište kružnici o poloměru r_2 a z ohniska F_2 kružnici o poloměru r_1 (možno i obráceně - z F_1 opsat r_1 a z F_2 opsat r_2 - dostanete symetricky bod M_2).
- 5) V průsečíku obou kružnic leží bod M_1 . Body M_2, M_3, M_4 jsou pak symetrické.
- 6) Zvolíme R_1, R_2 a hledejte další body hyperboly.



Obr. 54

- 1) Sestrojte ohniska, vrcholy, střed a asymptoty (viz předešlé).
- 2) V bodě E sestrojíme kolmici k ; k je kolmá k u_1 .
- 3) V průsečíku kolmice k a osy o (přímka F_1F_2) leží bod S_B .
- 4) Vzdálenost $BS_B = r_B$ je poloměrem hyperoskulační kružnice.



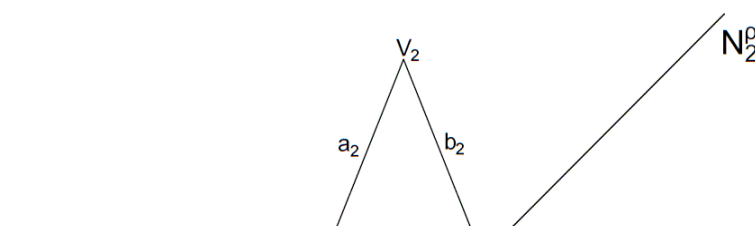
Obr. 55

PŘÍKLAD - ZADÁNÍ:

Zobrazte řez rotačního kužele s podstavou v první průmětně. Sestrojte skutečnou velikost řezu. Je dán střed $S(0;5;0)$, poloměr podstavy $r = 4$, výška kužele $v = 10$ a rovina řezu $p(-5;\infty;5)$.

POSTUP ŘEŠENÍ + VYSVĚTLENÍ(VIZ OBR. 56):

- 1) Sestrojte kužel, rovinu p , površky a , b .
- 2) Průsečíky A , B roviny p s površkami a , b jsou hlavní vrcholy eliptického řezu. Určete sdružené průměty bodů A , B , tedy A_1, A_2 resp. B_1, B_2 .
- 3) Hledáte střed elipsy a vedlejší vrcholy C , D . Střed elipsy musí nutně ležet ve středu úsečky AB (resp. A_2, B_2). V nárysu vrcholy splývají se středem S , tedy $C_2 \equiv D_2 \equiv S_2$.
- 4) V půdorysu najděte vedlejší vrcholy tak, že použijete pomocné kružnice k . Body C_1, D_1 musí nutně ležet na pomocné kružnici k_1 a na ordinále. V nárysu se kružnice k_2 jeví jako úsečka procházející středem S_2 a ohraničená průsečíky s površkami a , b . Jde vlastně o povrchovou kružnici v místě středu elipsy a její poloměr je r . Jelikož je rovnoběžná s půdorysnou, jeví se v nárysu jako úsečka a v půdorysu ji vidíme ve skutečné velikosti.
- 5) Tímto způsobem můžete sestrojovat další body elipsy v půdorysu tak, že konstruujete další kružnice k', k'' atd.
- 6) Můžete též využít skutečnosti, že platí, že jedním ohniskem elipsy v půdorysu je půdorysný průmět vrcholu V , bod V_1 . Symetricky od středu elipsy S_1 leží ohnisko druhé.
- 7) Sestrojte nyní dle postupu z bodu 4 kružnici k' a nalezněte body M_1 a M'_1 . Symetricky leží body M_1'' a M_1''' . Až budete mít dostatek bodů, proložíme jimi elipsu a řez v nárysu a půdorysu vytáhneme. Vhodné je využití barev.
- 8) Skutečnou velikost řezu můžete sestrojit několika způsoby. My využijeme jeden z nich, který šetří s místem a využívá konstrukce nárysu. Vzhledem k poloze roviny p a tím i elipsy platí, že úsečka A_2B_2 je skutečnou velikostí hlavní osy elipsy,



Obr. 56

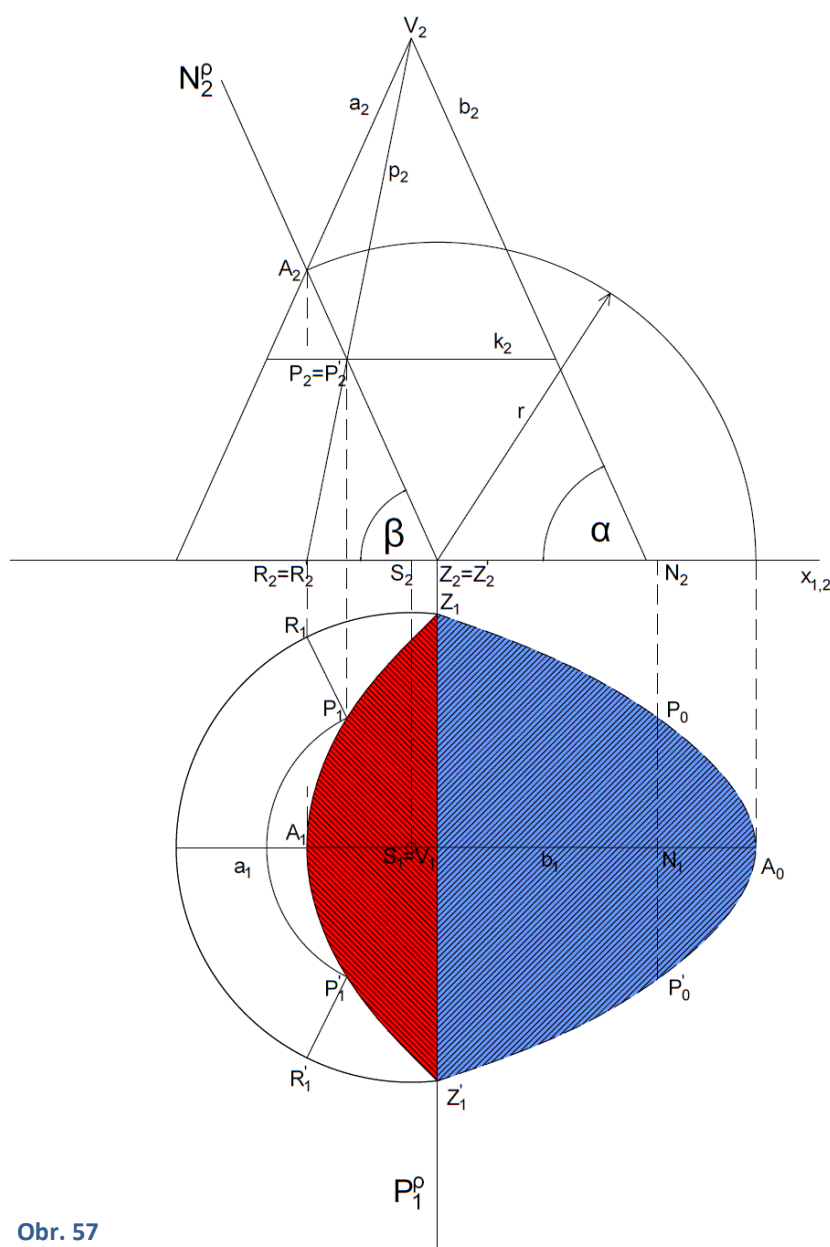
tedy $AB = A_2B_2$. Velikosti vedlejší osy vidíme ve skutečné velikosti pro změnu v půdorysu - platí tedy, že $CD = C_1D_1$ (přímka AV je rovnoběžná s nárysnou a přímka CD s půdorysnou a proto se A_2B_2 resp. C_1D_1 promítá s nezměněnou velikostí). V bodě S_2 sestrojte kolmici na A_2B_2 , vyneste velikost vedlejší osy a máme body A_0, B_0, C_0 a D_0 . Poté sestrojte elipsu libovolným, nám známým, způsobem. Řez pro přehlednost vyšrafujeme.

PŘÍKLAD - ZADÁNÍ:

Sestrojte parabolický řez rovinou p , je-li dáno $S(-5; 5,5; 0)$, výška kužele $v = 10$, poloměr podstavy $r = 4,5$ a rovina $p(-4,5; \infty; ?)$. Sestrojte skutečnou velikost řezu.

POSTUP ŘEŠENÍ + VYSVĚTLENÍ(VIZ OBR. 57):

- 1) Sestrojte kužel s podstavou v první průmětně a rovinu p . Musí platit, že $n_2^p \parallel b_2$ alias $\alpha = \beta$, jinak by totiž řez nebyl parabolický, ale buď eliptický nebo hyperbolický.
- 2) V nárysu se jeví parabola jako úsečka A_2Z_2 , vrchol paraboly je A_2 . Bod A_1 pak leží na průsečíku ordinály a površky a_1 .
- 3) Bodově můžete parabolou sestrojit za použití pomocných kružnic k, k' atd., jak známe z předešlé kapitoly o eliptickém řezu. Můžete ale též použít površek, na obr. 57 konkrétně površku p_2 resp. p_1 , a pak na ordinále a površce p_1 leží hledaný bod P_1 resp. symetricky leží bod P'_1 . Opět tímto způsobem můžete získat libovolný počet bodů průmětu paraboly v půdorysu a posléze řez vytáhnout.
- 4) Můžete též využít skutečnosti, že ohniskem průmětu paraboly v půdorysu je průmět vrcholu V , tedy bod V_1 . Tím můžete najít řídící přímku a použít libovolné konstrukce.
- 5) Skutečnou velikost řezu lze opět sestrojit mnoha způsoby, my zde použijeme otočení roviny p do půdorysny. Vzhledem k poloze roviny je poloměr otáčení bodu A (viz kapitola o otáčení roviny) $r = A_2Z_2$. Najděte vrchol A_0 ve sklopení. Stejným způsobem nalezneme body P_0 resp. P'_0 . Takto můžete pokračovat a bodově sestrojit parabolou. Řez opět pro lepší názornost vyšrafujeme.



Obr. 57

PŘÍKLAD - ZADÁNÍ:

Sestrojte hyperbolický řez a jeho skutečnou velikost, je-li dáno $S(0; 6; 0)$, poloměr podstavy $r = 5$, $V(0; 6; 5)$ a rovina řezu $p(-3; 5; \infty; 9)$.

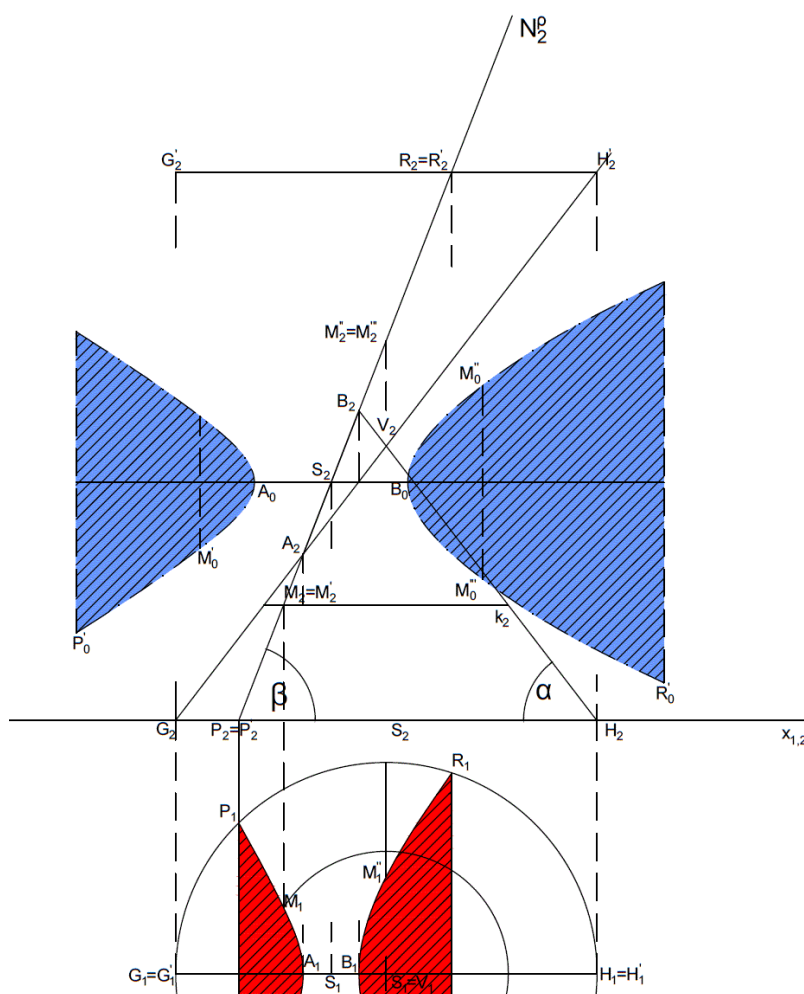
POSTUP ŘEŠENÍ + VYSVĚTLENÍ:

- 1) Sestrojte kuželovou plochu a rovinu p .
Kuželová plocha má dvě části, nad a pod vrcholem V $\alpha < \beta < 90^\circ$. Dále sestrojte rovinu p .
- 2) V nárysu se jeví hyperbola jako dvě úsečky, a to A_2V_2 a B_2R_2 (hyperbola má dvě větve). Body A_1 resp. B_1 musí ležet na povrchce a_1 resp. b_1 a na ordinále. Nalezněte i další body hyperboly, a to P_1, P'_1 resp. R_1, R'_1 - leží na ordinále a obvodu dolní resp. horní podstavy.
- 3) Sestrojte pomocnou povrchovou kružnici k a na k_1 a ordinálách najdeme body M, M', M'', M''' . Střed hyperboly S leží v polovině úsečky AB (A_1B_1 resp. A_2B_2). Takto můžete sestrojovat další body hyperboly.
- 4) Opět lze využít skutečnosti, že půdorysný průmět vrcholu V , bod V_1 je ohniskem hyperboly h_1 , (pravé větve, ohnisko levé leží symetricky). Tím jste schopni sestrojit asymptoty a dále libovolnou konstrukcí hyperbolu v půdorysu. Řez neopomeneme vytáhnout.
- 5) Z několika možností získání skutečného řezu my použijeme konstrukce, kdy otáčíme rovinu řezu do roviny rovnoběžné s průmětnou, která prochází středem S . Aby jste si obrázek neudělali nepřehledný, proveďte toto v nárysu.

V nárysu se vám ale budou po sklopení roviny řezu do roviny rovnoběžné s půdorysnou jevit všechny body jako dvě úsečky. Proto musíte provést ještě druhé otočení a to kolem osy hyperboly o do roviny tentokrát rovnoběžné s nárysnou (nebo prostě řečeno hyperbolu pootočí o 90°). Vzdálenost A_2P_2 resp. B_2R_2 vidíte v nárysu ve skutečné velikosti (poloměr otáčení pak je S_2P_2 resp. S_2R_2)

Vzdálenosti $R_1R'_1, P_1P'_1, M_1M'_1$ atd. vidíte ve skutečné velikosti v půdorysu. Pomocí poloměru S_2R_2 najdete bod 1. Zde vztyčte kolmici, na kterou naneste vzdálenost $R_1R'_1$,

půlenou bodem 1. Tím získáte body R_0 a R'_0 , (zde právě došlo ke dvojímu otočení). Řezy opět pro lepší názornost vyšrafujte a jestli jste konstrukci pochopili, můžete být sami se sebou spokojeni.



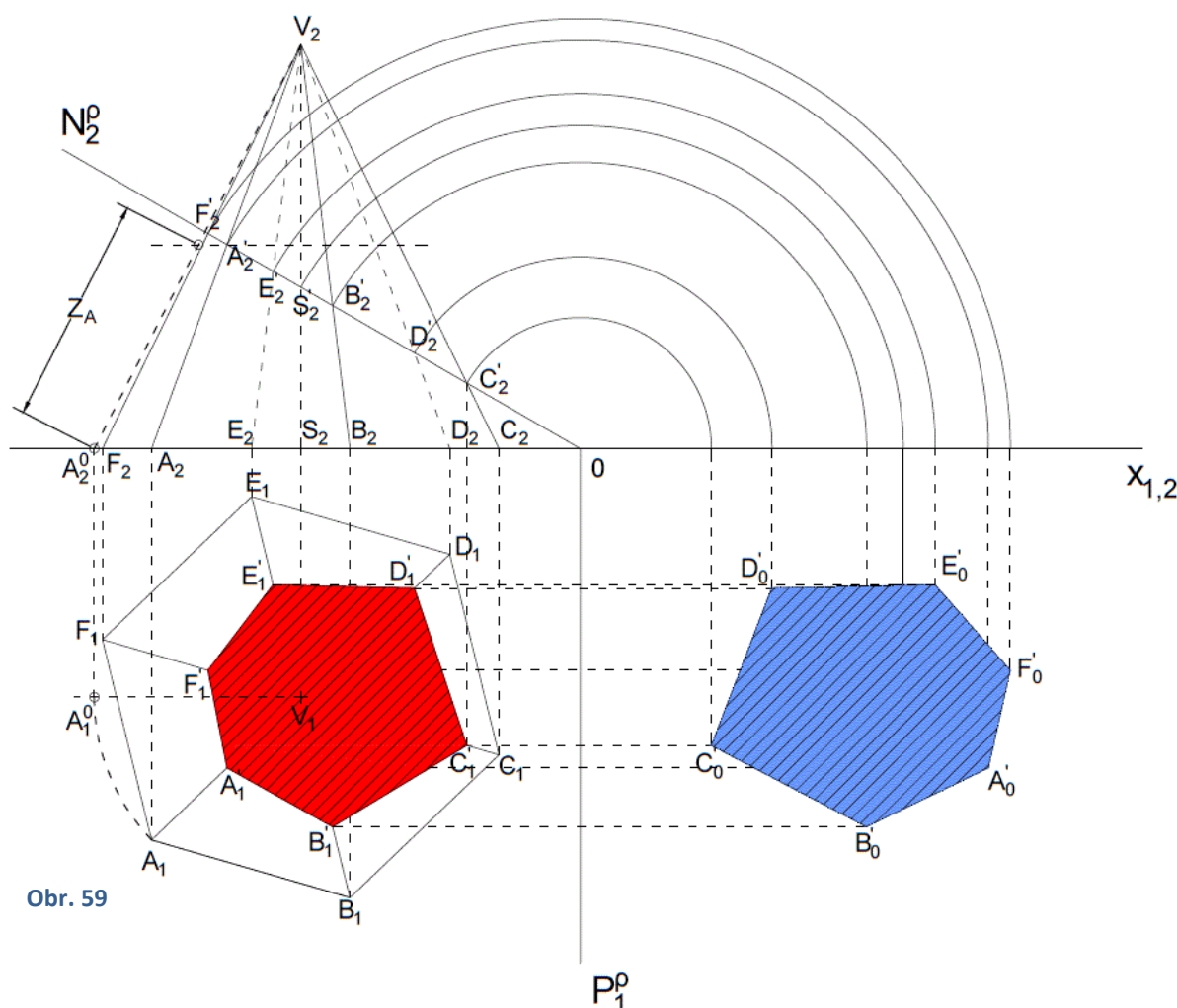
Obr. 58

V praxi dost často potřebujeme znát, jak vypadá plášť tělesa, zvláště v těch případech, kdy je výrobek zhotovován z plechu. Výrobce musí znát, jaký tvar má vystříhnout. Zjišťování sítě tělesa si předvedeme na příkladu.

PŘÍKLAD - ZADÁNÍ:

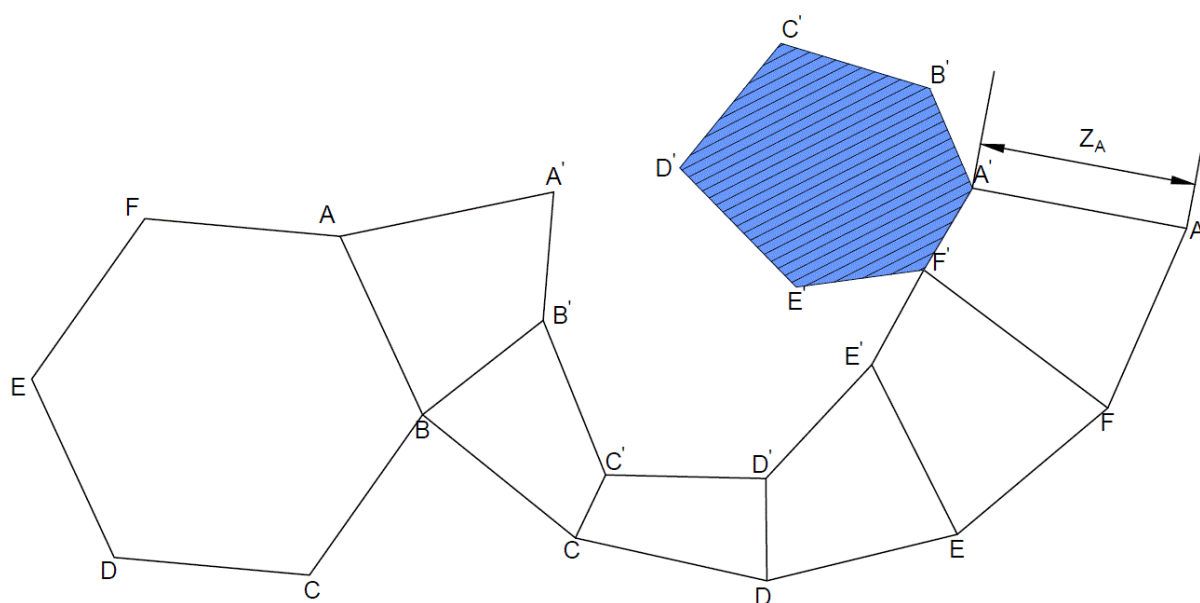
Šestiboký jehlan ABCDEF s podstavou v půdorysně a vrcholem V je seříznut rovinou p . Sestrojte řez tělesa a sestrojte síť seříznutého jehlanu. Je dáno vrchol podstavy $A(-2,4; 6,3; 0)$, $V(0; 4; 6,5)$ a $p(4,5; 90; 150)$.

POSTUP ŘEŠENÍ + VYSVĚTLENÍ(VIZ OBR. 59, 60):



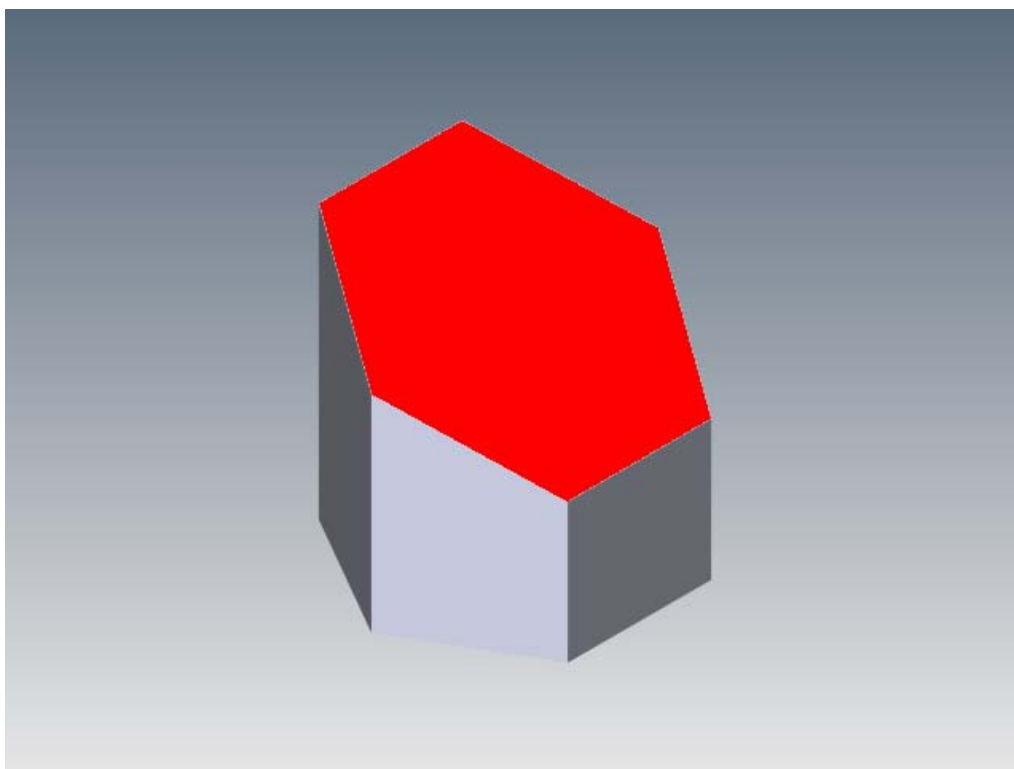
- 1) Sestrojte jehlan a rovinu řezu.
- 2) Sestrojte řez jehlanu (v druhém průmětu úsečka, v prvním průsečík površek a ordinál - viz kapitola řezy jehlanu).
- 3) Sestrojte skutečnou velikost řezu (otočením roviny řezu p do průmětny s využitím osové afinity - viz kapitola otáčení roviny).
- 4) Plášť jehlanu tvoří šest shodných rovnoramenných trojúhelníků, jejichž základna se rovná straně podstavy. Skutečnou velikost hrany VA zjistíte jejím otočením do polohy rovnoběžné s nárysou. (Zde se velikosti v náryse nezkreslují). V půdoryse se bod A_1 posune do bodu A_1^0 , na ordinále a základnici leží jeho druhý průmět A_2^0 . Velikost A_2^0V je skutečná velikost površky. Zjistit skutečnou velikost površky byste samozřejmě mohli jejím sklopením, ale toto je jednodušší a méně pracné.

- 5) Nyní můžete začít sestavovat plášť seříznutého jehlanu (viz obr. 60). Zvolte si v první řadě vrchol V a od něho začněte odvíjet další. Vezměte do kružítka vzdálenost A_2^0V a opište s tímto poloměrem kružnici se středem ve vrcholu V . Zvolte bod A na této kružnici a od něho začněte nanášet velikost stran podstavy (ve skutečné velikosti v půdorysu). Spojením těchto bodů máte plášť neseříznutého jehlanu.
- 6) K jedné ze stran (na obr. 60 zvolena AB) přidejte podstavu a máte kompletní síť neseříznutého jehlanu.
- 7) Vás však zajímá jehlan seříznutý. V bodech $A'_2, B'_2, C'_2, D'_2, E'_2$ a F'_2 vedte rovnoběžku se základnicí $x_{1,2}$ (viz obr. 59, kde tyto rovnoběžky protnou povrchu v otočení A_2^0V , získáváte body v otočení $A_2'^0A_2^0, B_2'^0A_2^0$ atd. Vzdálenosti $A_2^0, B_2^0, A_2'^0, B_2'^0$ atd. jsou pak skutečné velikosti stran na plášti seříznutého jehlanu. Opět byste mohli tuto velikost získat sklopením, ale zde je výhoda této konstrukce patrná. Tyto skutečné velikosti stran seříznutého jehlanu vyneste do sítě jehlanu (viz obr. 60) a dostanete body A', B' atd.
- 8) K jedné ze stran řezu (v obr. 60 zvolena $F'A'$) vyneste skutečnou velikost řezu. Tím jste dostali definitivní a kompletní síť seříznutého jehlanu, kterou pochopitelně vytáhnu.



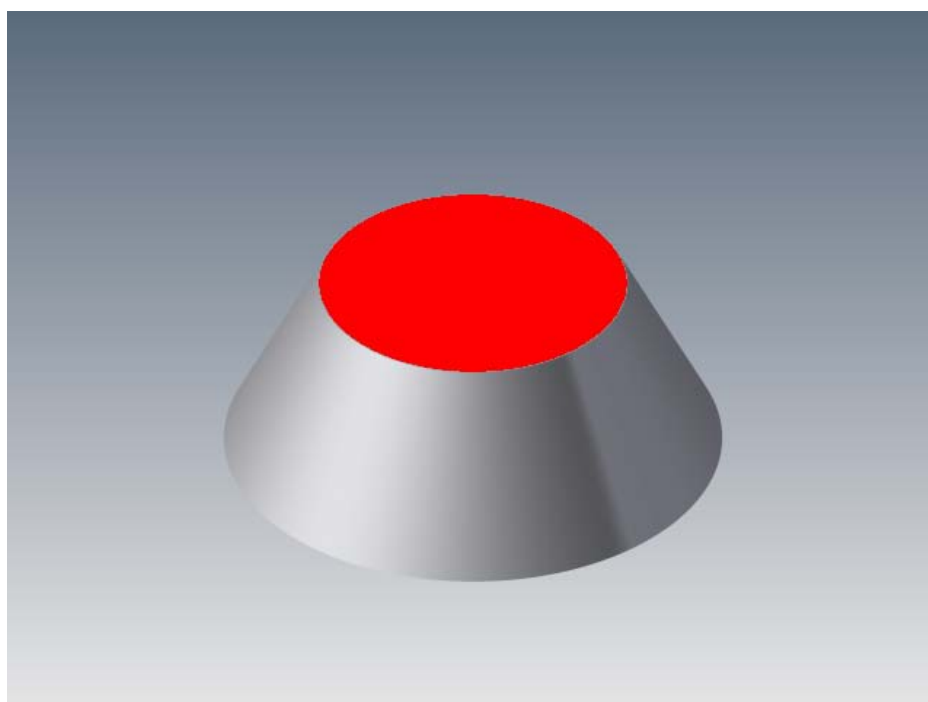
Obr. 60

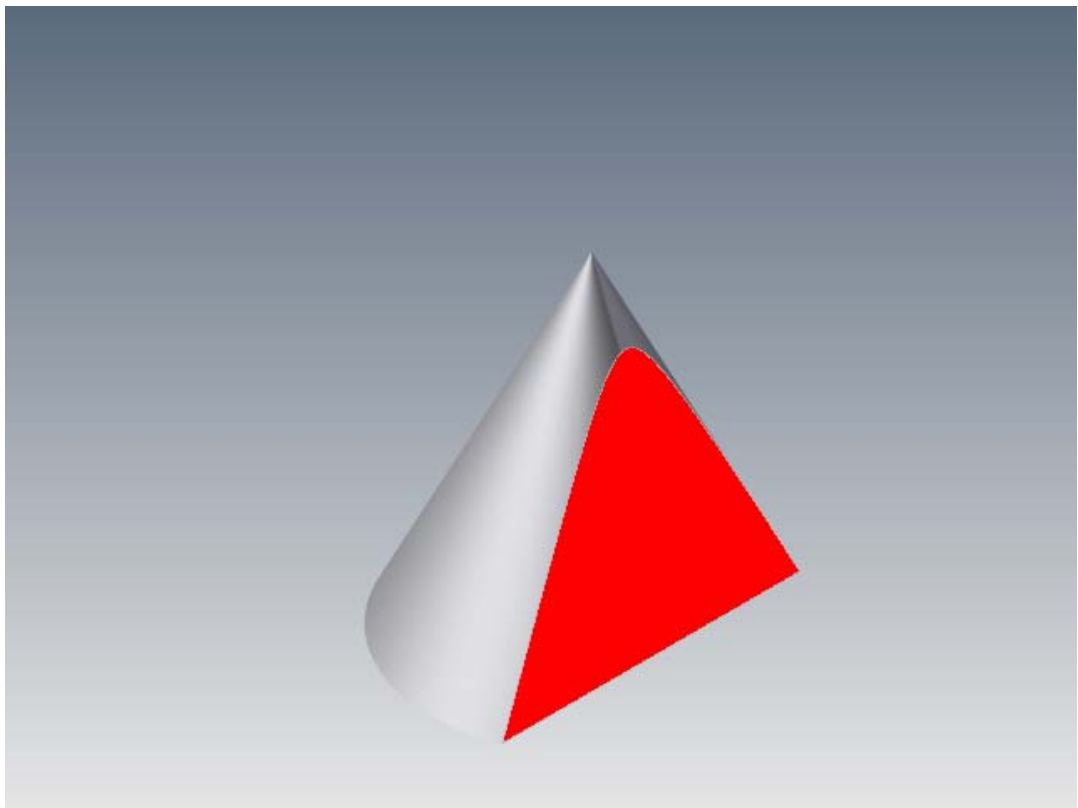
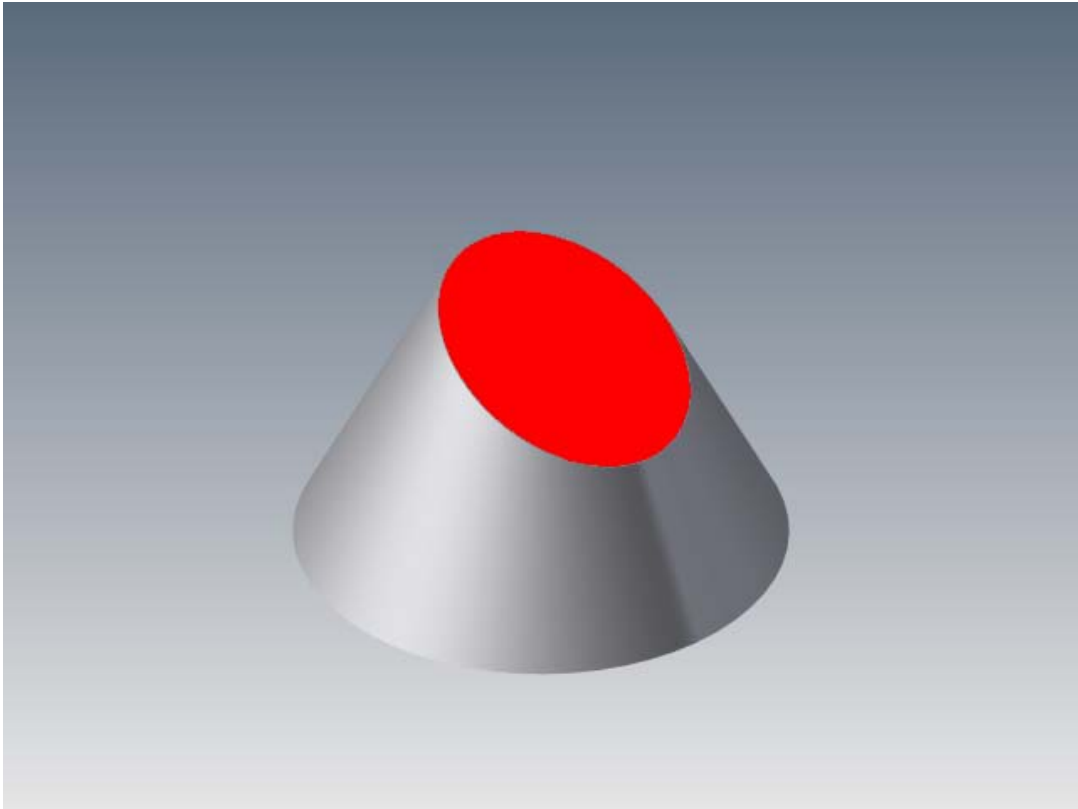
ŘEZ ŠESTIBOKÝM HRANOLEM



ŘEZY OBECNÝM KUŽELEM

KRUŽNICE







OSOVÁ AFINITA	27
Příklad - zadání(viz obr. 41):	27
Postup řešení:	27
ZÁKLADNÍ PRAVIDLA OSOVÉ AFINITY	27
ŘEZ HRANOLU ROVINOU	28
Příklad - zadání:	28
Postup řešení(viz obr. 42):	28
ŘEZ JEHLANU ROVINOU, STŘEDOVÁ KOLINEACE	29
Příklad - zadání:	29
Postup řešení + vysvětlení:	29
STŘEDOVÁ KOLINEACE	30
SESTROJENÍ ŘEZU TĚLESA OBECNOU ROVINOU ZA POUŽITÍ TŘETÍ POMOCNÉ PRŮMĚTNY	31
Příklad - zadání:	31
Postup řešení + vysvětlení (viz obr.44):	32
ŘEZY KUŽELE ROVINOU, KUŽELOSEČKY	33
Vznik kuželosečky	33
Kuželosečky - elipsa	34
Další údaje: (viz obr 46a)	34
Základní vztah	34
Bodová konstrukce elipsy:	35
Příklad - zadání:	35
Postup řešení:	35
KONSTRUKCE ELIPSY POMOCÍ HYPEROSKULAČNÍCH KRUŽNIC	36
Příčková konstrukce elipsy:	37
Proužková konstrukce elipsy	37
PARABOLA	38
Bodová konstrukce paraboly	38
Konstrukce pomocí hyperoskulační kružnice	38

HYPERBOLA	39
Bodová konstrukce hyperboly (viz obr. 54):.....	39
Příklad - zadání:	39
Postup řešení:	39
Konstrukce pomocí hyperoskulačních kružnic (viz obr. 55)	40
ELIPTICKÝ ŘEZ KUŽELE	41
Příklad - zadání:	41
Postup řešení + vysvětlení(viz obr. 56):	41
PARABOLICKÝ ŘEZ KUŽELE	42
Příklad - zadání:	42
Postup řešení + vysvětlení(viz obr. 57):	42
HYPERBOLICKÝ ŘEZ KUŽELE.....	43
Příklad - zadání:	43
Postup řešení + vysvětlení:.....	43
SÍTĚ TĚLES.....	44
Příklad - zadání:	44
Postup řešení + vysvětlení(viz obr. 59, 60):.....	44
3D modely seříznutých těles	46
Řez šestibokým hranolem	46
Řezy obecným kuželem.....	46
Kružnice.....	46
Elipsa	47
Parabola	47
Hyperbola.....	48